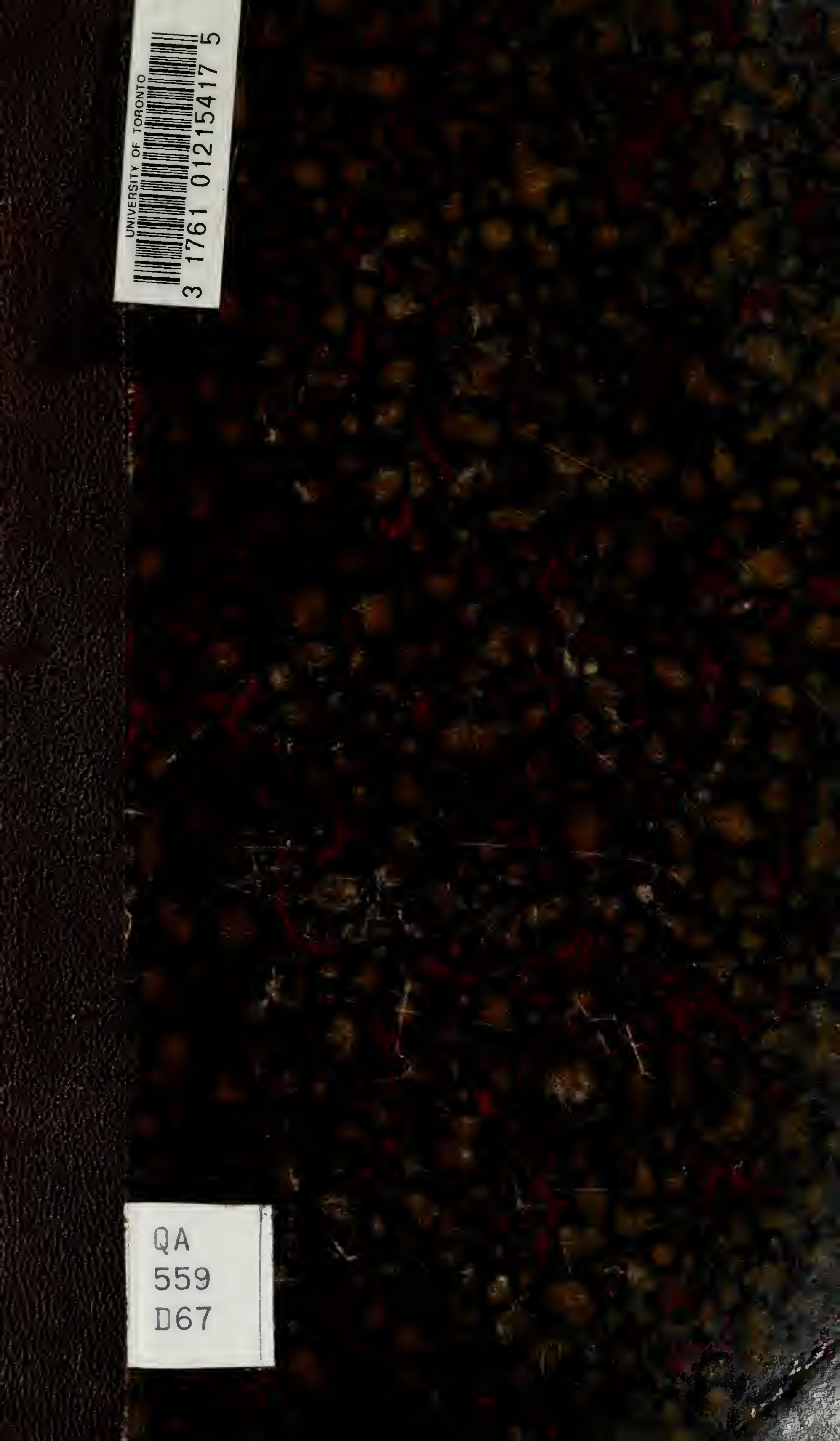
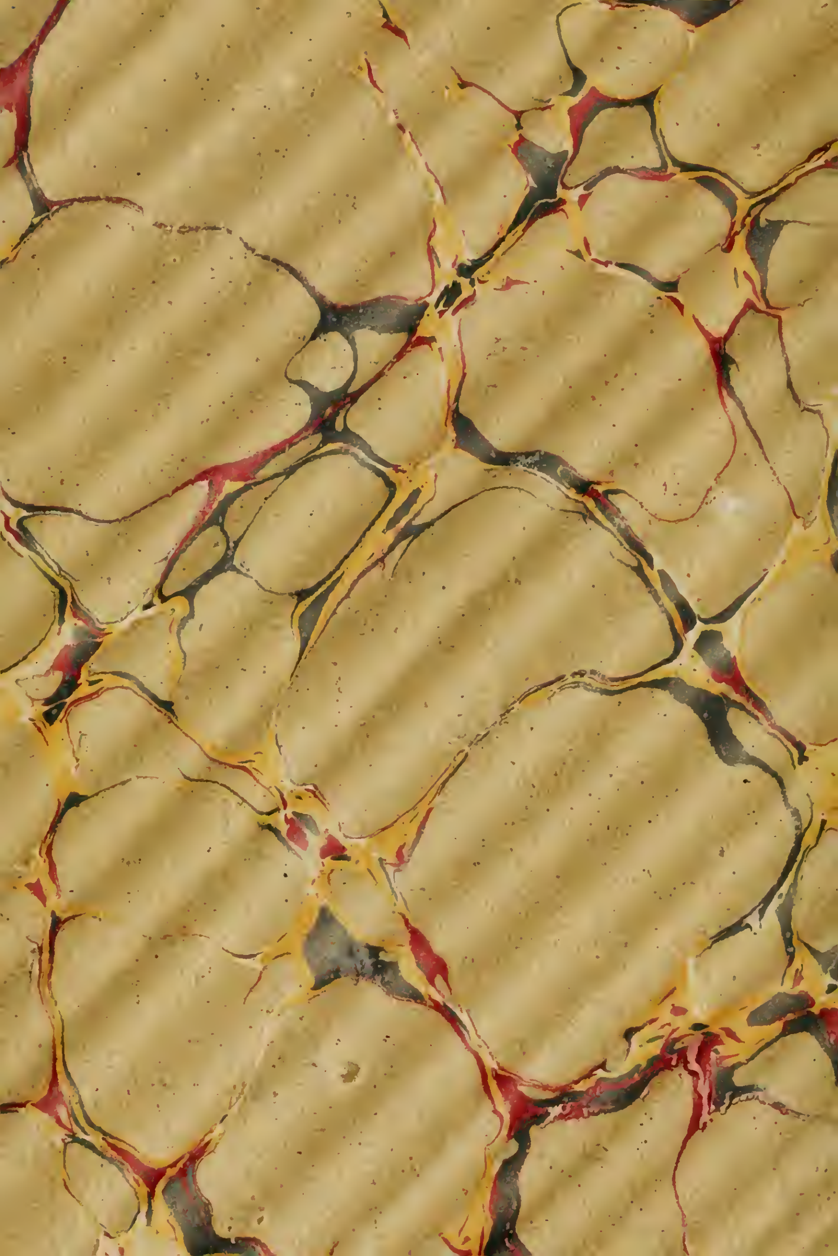
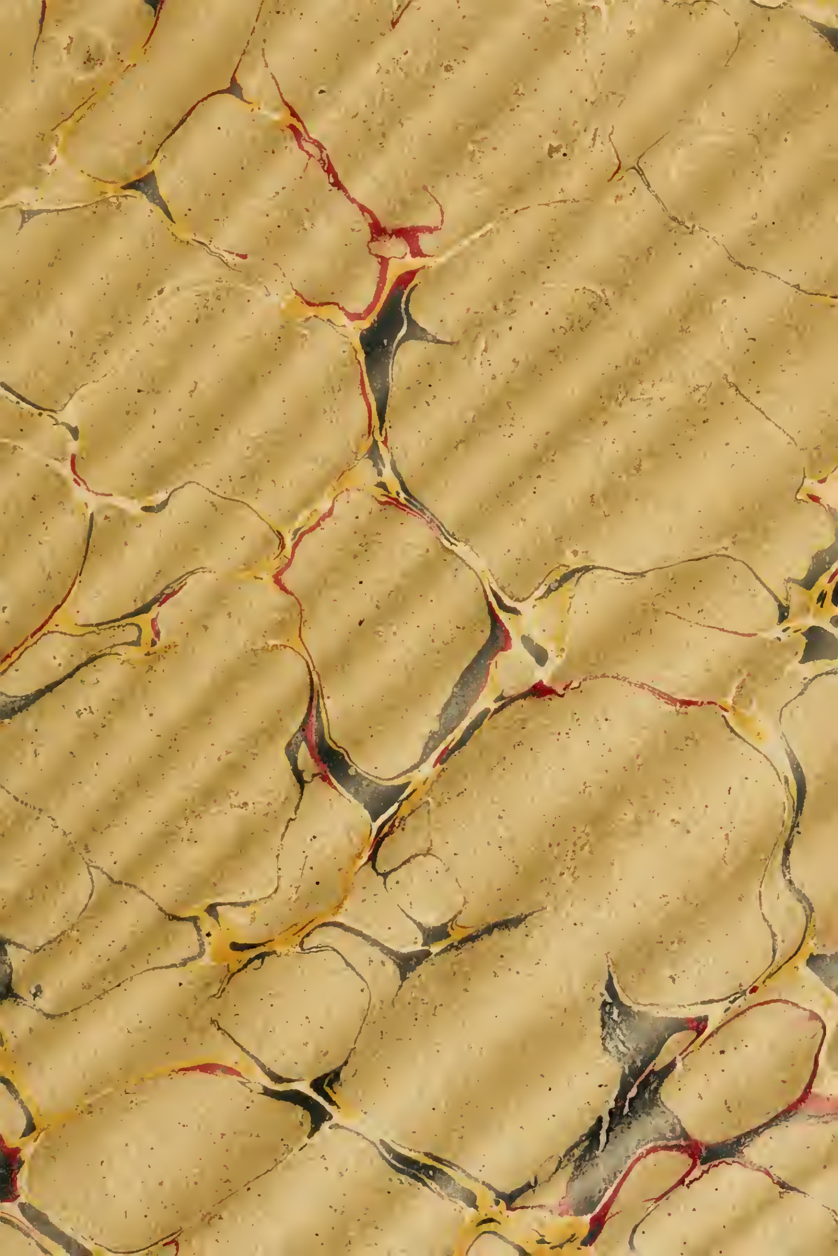

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215417 5
QA
559
D67





Nouvelle Détermination analytique

des Foyers et Directrices

dans les Sections coniques.

Ouvrages du même auteur,

qui se trouvent aux mêmes Librairies.

Eléments de la Théorie des Déterminants, avec application à l'Algèbre, la Trigonométrie et la Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace, à l'usage des classes de mathématiques spéciales. In-8; 1877. . . . . 8 fr.

Règles mnémoniques pour établir la Théorie des signes en Trigonométrie, et pour écrire les formules de Delambre. In-8; 1866. . . . . 1 fr.

Méthode expéditive pour l'Extraction de la racine cubique des nombres entiers. In-8; 1866. . . . . 1 fr.

Propriétés nouvelles des Quadrilatères en général, avec application aux quadrilatères inscriptibles, circonscriptibles etc. In-8; 1868. . . . . 2 fr. 25 c.

Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation des coordonnées dans le plan et dans l'espace, avec application aux lignes et surfaces de deux premiers degrés. In-8. . . . . 1 fr. 50 c.

Nouvelle étude algébrique des lignes du second degré. 1[re] Partie: Ellipse et Hyperbole. In-8; 1866. . . . . 1 fr. 50 c.
2[e] Partie: Parabole. In-8; 1868. . . . . 1 fr. 50 c.

Ce Mémoire est extrait du Journal intitulé: Archiv der Mathematik und Physik, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Ces Archives paraissent par volume, en 4 livraisons, de 560 pages environ, avec planches. Le prix de l'abonnement par volume est de 14 francs. On s'abonne à la Librairie *C. A. Kooh (J. Sengbusch)* à Leipzig, ou chez *M. Gauthier-Villars* à Paris.



Nouvelle Détermination analytique

des

FOYERS ET DIRECTRICES

dans les sections coniques représentées par leurs équations générales;

précédées des

Expressions générales des divers éléments,

que l'on distingue dans les courbes du second degré;

et suivie de la

Détermination des coniques à centre

par leur centre et les extrémités de deux demi-diamètres conjugués.

Par

GEORGES DOSTOR

Docteur ès sciences

Professeur à l'Université catholique de Paris.

Extrait

des Archives de Mathématiques et de Physique.

PARIS,

Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire

du Bureau des Longitudes, de l'Ecole polytechnique, etc.

Quai des Augustins, 55.

LEIPZIG,

Librairie centrale de C. A. Koch.

(J. Sengbusch.)

Objet du Mémoire.

Nous nous proposons, dans cette étude, d'exposer une méthode aisée et rapide, au moyen de laquelle on peut déterminer, par l'analyse, les foyers et les directrices des courbes du second degré.

Cette méthode fournit les équations aux foyers sous leur forme la plus générale. Elle fait voir de suite que ces foyers, d'une part, se trouvent sur les axes de la conique, et que, d'autre part, ils appartiennent à deux hyperboles équilatères, dont elle fournit les équations.

Nous en tirons facilement l'équation aux abscisses des foyers, celle aux ordonnées, ainsi que l'équation aux directrices.

Les équations aux foyers, simples dans leur forme et avantageuses dans les applications, peuvent aussi se trouver par un autre procédé.

Si l'on considère le foyer cherché, $x=\alpha$, $y=\beta$, comme le centre d'un cercle de rayon nul, qui est doublement tangent à la conique $f(x,y,z)=0$, il suffira d'exprimer que l'équation

$$4f(\alpha,\beta,\gamma)f(x,y,z)-(xf'_\alpha+yf'_\beta+zf'_\gamma)^2=0$$

des tangentes, menées du point (α,β,γ) à notre conique, représente un cercle de rayon nul.

Mais ce procédé est long et compliqué; il repose sur l'équation précédente des tangentes issues d'un même point, dont le développement est assez laborieux et la réduction passablement épineuse. On peut consulter à ce sujet la Geométrie analytique de **L. Painvin**, à la page 465 de la partie, qui concerne les Courbes du second degré.

Notre méthode (n° 92 et suivants), au contraire, est simple et directe; elle n'exige presque pas de calculs, et ne suppose connues que les conditions de rationnabilité de la racine carrée d'un polygone du second degré, à deux ou à une variable. L'établissement de ces conditions est du ressort de l'algèbre élémentaire; il se fait aussi, avec facilité, au moyen de la théorie des centres, en Géométrie analytique (n° 86).

Avant d'aborder la Détermination analytique des foyers (n° 92 à n° 120), nous avons cru nécessaire de calculer les expressions de tous les éléments que l'on distingue dans les courbes du second degré, lesquelles sont représentées par leurs équations les plus générales. Nous obtenons ces expressions par des procédés fort aisés, faciles à saisir et simples à appliquer, d'un usage élémentaire qui se trouve à la portée des commençants. Ce calcul est justifié par l'utilité qu'offre la connaissance de ces expressions, tout formées, dans l'étude des coniques, qui sont représentées par des équations numériques, ainsi que par l'avantage que trouve leur fréquent emploi dans les recherches sur les courbes du second degré.

Les mêmes expressions, calculées d'avance, nous seront nécessaires, en partie du moins, dans la détermination directe des foyers et des directrices; elles nous serviront en même temps de contrôle pour les résultats fournis par cette détermination.

Nous les avons établies pour le cas où les axes sont rectangulaires, ainsi que pour celui où les coordonnées sont obliques.

Nous terminons ce travail par la recherche des équations, qui représentent les coniques, dont deux demi-diamètres conjugués, issus d'une origine connue, aboutissent à deux points donnés. Nous y puisons une nouvelle méthode propre à faire trouver les expressions générales des points et droites remarquables, que l'on rencontre dans les courbes du second degré.

Il n'est peut-être pas sans utilité de présenter au lecteur, pour le guider dans l'étude, une table résumée de la nature et de l'ordre des matières que nous traitons dans cet écrit; il se fera ainsi une idée plus nette et plus complète de l'importance relative des questions que nous soumettons à son appréciation.

Le texte courant se rapporte à des axes rectangulaires. La partie, affectée d'un astérisque *, est relative aux coordonnées obliques; elle peut être négligée à une première lecture.

Table des matières.

Première Partie.

Expressions générales des divers éléments, que l'on distingue dans les courbes du second degré.

Pages

§ I. Equations générales des axes dans les courbes du second degré 5

§ II. Grandeur des axes dans les coniques à centre . . . 15

§ III. Sommets des coniques à centre 20

§ IV. Foyers des coniques à centre 25

§ V. Diamètres conjugués égaux de l'ellipse et Asymptotes de l'hyperbole 29

§ VI. Axe, Sommet et Tangente au sommet de la parabole 36

§ VII. Paramètre, Foyer et Directrice de la parabole . . 46

§ VIII. Paraboles assujetties à des conditions données . 52

Deuxième Partie.

Détermination analytique des foyers dans les sections coniques.

§ I. Conditions pour qu'une fonction homogène du second degré, à trois variables, soit un carré 55

§ II. Equations générales aux foyers des sections coniques 60

§ III. Equations aux foyers des coniques à équation réduite 67

§ IV. Détermination des foyers et des directrices dans les coniques à centre 70

§ V. Foyer et Directrice de la parabole 78

Troisième Partie.

Pages

Les Coniques à centre déterminées par leur centre et les extrémités de deux demi-diamètres conjugués 85

Première Partie.

Expressions générales des divers éléments, que l'on distingue dans les courbes du second degré.

§ I. Equations générales des axes dans les courbes du second degré.

1. **Equation aux axes des coniques en général.** Le procédé, qui est habituellement employé pour calcul de l'équation aux axes, est assez simple et d'un usage commode. Nous allons l'exposer, en supposant d'abord les coordonnées rectangulaires.

Dans les courbes du second degré, qui sont représentées par l'équation générale

(1) $$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

l'équation du diamètre, conjugué à la direction

$$y = mx,$$

est

(2) $$F'_x + mF'_y = 0,$$

ou

$$Ax + By + D + m(Bx + Cy + E) = 0.$$

Le coefficient angulaire m' de ce diamètre est par suite

$$m' = -\frac{A + Bm}{B + Cm}.$$

Le diamètre (2) sera un axe de la courbe (1), si l'on a

$$mm' + 1 = 0,$$

ou

$$-\frac{m(A + Bm)}{B + Cm} + 1 = 0.$$

On en tire la relation

(3) $$Bm^2 + (A - C)m - B = 0,$$

à laquelle devra satisfaire le coefficient angulaire m des cordes conjuguées au diamètre (2), pour que ce diamètre soit un axe de la conique (1).

Eliminant m entre les deux équations (2) et (3), on obtient

(I) $$BF'^2_x - (A-c)F'_xF'_y - BF'^2_y = 0$$

pour l'équation aux axes de la conique (1),

Par l'inspection de cette équation, on voit que, si $B = 0$, les deux axes de la conique (1) sont, pour des coordonnées rectangulaires,

$$F'_x = 2(Ax + D) = 0, \quad F'_y = 2(Cy + E) = 0.$$

Ces axes sont donc les parallèles aux axes de coordonnées, menées par la point

$$x = -\frac{D}{A}, \quad y = -\frac{E}{C}.$$

Si nous résolvons l'équation (I) par rapport à F'_x, nous obtiendrons

(II) $$F'_x = \frac{A - C \pm \sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}{2B} F'_y$$

pour les équations séparées des deux axes.

En résolvant la même équation (I) par rapport à F'_y, on trouvera

(III) $$F'_y = \frac{C - A \pm \sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}{2B} F'_x$$

pour les mêmes équations.

Si nous posons, pour abréger,

$$\sqrt{4B^2 + (A-C)^2} = R,$$

les équations des axes pourront s'écrire

$$2BF'_x = (A - C \pm R)F'_y \quad \text{ou} \quad 2BF'_y = (C - A \pm R)F'_x.$$

Dans les équations (II) et (III), les signes supérieurs, qui affectent les radicaux, se correspondent, ainsi que les signes inférieurs.

2. **Exemple I.** Trouver les équations des axes de la conique

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 5x - 2y - 19 = 0.$$

Nous avons

$$A = 5, \quad B = 2, \quad C = 2,$$

d'où nous tirons

$$A - C = 3, \quad \sqrt{4B^2 + (A-C)^2} = 5;$$

et comme

$$F'_x = 10x + 4y - 5, \quad F'_y = 4x + 4y - 2,$$

nous trouvons

$$10x+4y-5=\frac{3\pm5}{4}(4x+4y-2),$$

ou

$$2x-4y-1=0,\quad 2x+y-1=0$$

pour les équations des deux axes.

Exemple II. Déterminer les axes de la conique

$$3x^2+12xy-2y^2-4x+2y-1=0.$$

Puisque

$$A=3,\quad B=6.\quad C=-2$$

il vient

$$A-C=5,\quad \sqrt{4B^2+(A-C)^2}=13;$$

et, comme

$$F'_x=2(3x+6y-2),\quad F'_y=2(6x-2y+1),$$

nous aurons, pour les deux axes, les équations

$$12x-18y+7=0,\quad 21x+14y-4=0.$$

* 3. Lorsque les axes de coordonnées sont obliques, le diamètre (2) sera perpendiculaire à la direction des cordes conjuguées, si l'on a

$$1+mm'+(m+m')\cos\theta=0,$$

ou

$$m'=-\frac{1+m\cos\theta}{m+\cos\theta}.$$

L'équation, qui donne les coefficients angulaires des axes, sera donc

$$\frac{1+m\cos\theta}{m+\cos\theta}=\frac{A+Bm}{B+Cm},$$

ou encore

$$\frac{B+Cm}{m+\cos\theta}=\frac{A+Bm}{1+m\cos\theta}.$$

Si l'on remplace m par sa valeur $-\frac{F'_x}{F'_y}$ tirée de (2), on obtiendra, pour l'équation aux axes, dans le cas de coordonnées obliques,

$$\frac{BF'_y-CF'_x}{-F'_x+\cos\theta F'_y}=\frac{AF'_y-BF'_x}{F'_y-\cos\theta F'_x},$$

ou bien

(IV) $$(B-C\cos\theta)F'^2_x-(A-C)F'_xF'_y-(B-A\cos\theta)F'^2_y=0.$$

Résolvant cette équation successivement par rapport à F'_x et à F'_y, on obtiendra, pour les équations distinctes des deux axes

(V) $$F'_x=\frac{A-C\pm\sqrt{(A-C)^2+4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)}}{2(B-C\cos\theta)}F'_y,$$

ou

$$\text{(VI)}\quad F'_y = \frac{C-A \pm \sqrt{(A-C)^2+4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)}}{2(B-A\cos\theta)} F'_x.$$

Il n'est pas inutile de signaler l'identité

$$\text{(VII)}\quad \begin{aligned} &(A-C)^2+4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta) \\ &= 4(B^2-AC)\sin^2\theta+(A-2B\cos\theta+C)^2, \end{aligned}$$

qui, pour des coordonnées rectangulaires, se réduit à

$$\text{(VIII)}\quad 4B^2+(A-C)^2 = 4(B^2-AC)+(A+C)^2.$$

On peut poser

$$\sqrt{(A-C)^2+4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)} = R';$$

l'équation des axes sera alors

$$2(B-C\cos\theta)F'_x = (A-C\pm R')F'_y,$$

ou

$$2(B-A\cos\theta)F'_y = (C-A\pm R')F'_y.$$

* 4. **Exemple I.** Calculer les équations des axes pour la courbe

$$x^2-3xy+y^2-5x+5y+3 = 0.$$

Nous avons

$$A = 1,\quad B = -\tfrac{3}{2},\quad C = 1,$$

ce qui réduit le radical de (V) à

$$3+2\cos\theta,$$

et, parsuite, le facteur de F'_y à ± 1. Puisque

$$F'_x = 2x-3y-5,\quad F'_y = -3x+2y+5,$$

les équations des deux axes seront

$$2x-3y-5 = \pm(-3x+2y+5)$$

ou

$$x-y-2 = 0,\quad x+y = 0;$$

elles sont indépendantes de l'angle des axes.

Exemple II. Déterminer les axes de la conique

$$10x^2+6xy+5y^2-28x+8y-10 = 0,$$

sachant que $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

Puisque

$$B-C\cos\theta = 0,\quad A-C = 5,\quad B-A\cos\theta = -3,$$

l'équation aux axes (IV) se réduit à

$$-5F'_xF'_y+3F'^2_y=0,$$

ce qui fournit, pour les deux axes, les équations

$$F'_y=0, \quad -5F'_x+3F'_y=0,$$

ou

$$3x+5y-14=0, \quad x-2=0.$$

5. **Equation générale des coniques à centre.** L'équation aux axes affecte une forme beaucoup plus simple et se détermine plus rapidement, lorsque la conique est donnée d'un centre unique et qu'elle se trouve rapportée à ce centre, comme origine des coordonnées.

Supposons que, dans l'équation (1), l'invariant B^2-AC soit différent de zéro. Cette équation représentera une conique à centre, et les coordonnées a et b du centre seront fournies par le système des deux équations linéaires

(4) $$\begin{cases} \frac{1}{2}F'_x=Aa+Bb+D=0, \\ \frac{1}{2}F'_y=Ba+Cb+E=0, \end{cases}$$

qui donnent

(IX) $$a=\frac{CD-BE}{B^2-AC}, \quad b=\frac{AE-BD}{B^2-AC},$$

pour les coordonnées du centre.

Si l'on rapporte la courbe (1) à son centre, son équation se réduira à

(5) $$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+H=0,$$

où l'on a

$$H=Da+Eb+F,$$

ou bien

(6) $$Da+Eb+F-H=0.$$

On peut donner à l'expression de H une forme indépendante des coordonnées a et b du centre.

En effet les trois équations (4) et (6) sont du premier degré par rapport aux deux coordonnées a et b du centre; elles sont nécessairement compatibles; par suite, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. On obtient ainsi, entre H et les coefficients de l'équation (5), la relation

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F-H \end{vmatrix}=0,$$

qui peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ D & E & H \end{vmatrix} = 0,$$

et donne

$$H \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Le second membre de cette égalité n'est autre que le discriminant de l'équation du second degré (1) rendue homogène. En désignant ce discriminant, suivant l'usage, par Δ, on trouve, pour la valeur de H, l'expression

$$\text{(X)} \qquad H = -\frac{\Delta}{B^2 - AC} = \frac{AE^2 + CD^2 + FB^2 - 2BDE - ACF}{B^2 - AC}.$$

6. **Equation générale des coniques à centre, qui ont leur centre au point** $x = a$, $y = b$. Nous avons, entre a et b, le deux relations

$$2Aa + 2Bb + 2D = 0,$$
$$2Ba + 2Cb + 2E = 0,$$

qui, étant multipliées respectivement par x et y, puis ajoutées, donnent

$$2(Ax + By)a + 2(Bx + Cy)b + 2Dx + 2Ey = 0.$$

Mais l'équation (1) de la conique peut se mettre sous la forme

$$(Ax + By)x + (Bx + Cy)y + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

En retranchant l'égalité précédente, on obtient

$$\text{(XI)} \qquad (Ax + By)(x - 2a) + (Bx + Cy)(y - 2b) + F = 0$$

pour l'équation générale des coniques, qui ont leur centre au point (a, b).

Cette équation ne contient plus que trois paramètres arbitraires

$$\frac{A}{F}, \quad \frac{B}{F} \quad \text{et} \quad \frac{C}{F}.$$

7. **Forme plus simple de l'équation aux axes, lorsque la conique est rapportée à son centre.** Soient x et y les coordonnées d'un sommet quelconque de la conique (5), qui se trouve rapportée à son centre.

Le coefficient angulaire de l'axe, qui passe par ce sommet (x, y), est

(7) $$m = \frac{y}{x},$$

tandisque celui de la tangente au même sommet est

(8) $$m' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Comme aux sommets de la courbe (5), et à ces sommets seuls, la tangente est perpendiculaire au diamètre, qui aboutit au point de contact, les coefficients angulaires m et m' devront satisfaire à l'égalité de condition

$$1 + mm' = 0,$$

qui existe pour deux droites perpendiculaires entre elles, lorsque les axes de coordonnées sont rectangulaires.

On trouve ainsi que les deux coefficients angulaires (7) et (8) sont liés entre eux par l'égalité

$$1 - \frac{yf'_x}{xf'_y} = 0,$$

qui fournit l'équation aux axes

(XII) $$\frac{f'_x}{x} = \frac{f'_y}{y}.$$

Ainsi, Pour des coordonnées rectangulaires, lorsque l'origine est au centre de la conique, les coordonnées de tout sommet sont proportionnelles aux dérivées du premier membre de l'équation de la conique, prises respectivement par rapport à ces coordonnées.

Puisqu' on a

$$f'_x = 2(Ax + By), \quad f'_y = 2(Bx + Cy),$$

l'équation (XII) revient à

(XIII) $$\frac{Ax + By}{x} = \frac{Bx + Cy}{y}.$$

On en conclut que

$$(Bx + Cy)x - (Ax + By)y = 0,$$

ou

(XIV) $$Bx^2 - (A - C)xy - By^2 = 0$$

est l'équation aux axes de la conique, lorsque la courbe est rapportée à son centre.

Cette équation peut se tirer de l'équation (I), qui se rapporte à

une origine quelconque, en y remplaçant les dérivées par les variables elles-mêmes.

L'équation (XIV), étant résolue successivement par rapport à x et à y, fournit les équations séparées des deux axes, qui sont

$$\text{(XV)} \qquad \frac{x}{y} = \frac{A - C \pm \sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}{2B} = \frac{A - C \pm R}{2B},$$

ou

$$\text{(XVI)} \qquad \frac{y}{x} = \frac{C - A \pm \sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}{2B} = \frac{C - A \pm R}{2B}.$$

Exemple. Trouver les équations des axes de l'ellipse

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0.$$

En ayant recours à la formule (XVI), on trouve que ces équations sont

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} x.$$

* 8. Si les axes des coordonnées sont obliques, les coefficients angulaires

$$m = \frac{y}{x}, \quad m' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

de l'axe de la conique (5), qui aboutit au sommet (x, y), et de la tangente à ce sommet devront satisfaire à la condition de perpendicularité

$$1 + mm' + (m + m')\cos\theta = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{-m'}{1 + m\cos\theta} = \frac{1}{m + \cos\theta}.$$

Remplaçant m' et m par les valeurs ci-dessus, on trouve que l'équation aux axes sera, dans ce cas,

$$\text{(XVII)} \qquad \frac{f'_x}{x + y\cos\theta} = \frac{f'_y}{y + x\cos\theta}.$$

Si l'on substitue à f'_x et f'_y leurs expressions

$$2(Ax + By) \quad \text{et} \quad 2(Bx + Cy),$$

l'équation précédente prendra la forme

$$\text{(XVIII)} \qquad \frac{Ax + By}{x + y\cos\theta} = \frac{Bx + Cy}{y + x\cos\theta}.$$

et pourra s'écrire

(XIX) $$(B - A\cos\theta)x^2 - (A - C)xy - (B - C\cos\theta)y^2 = 0.$$

Il est à remarquer que les quantités

$$x + y\cos\theta, \quad y + x\cos\theta$$

sont les projections orthogonales du demi-axe, qui aboutit au sommet (x, y), sur les deux axes de coordonnées. L'équation (XVII) prouve donc que

Les projections orthogonales d'un axe de la conique, sur les deux axes de coordonnées, sont proportionnelles aux dérivées de l'équation de la courbe, prises respectivement par rapport aux coordonnées de l'une des extrémités de cet axe.

L'équation (XIX), étant résolue successivement par rapport à x et à y, donne

(XX) $$\frac{x}{y} = \frac{A - C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4(B - A\cos\theta)(B - C\cos\theta)}}{2(B - A\cos\theta)},$$

ou

(XXI) $$\frac{y}{x} = \frac{C - A \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4(B - A\cos\theta)(B - C\cos\theta)}}{2(B - C\cos\theta)}$$

pour les équations séparées des deux axes.

Exemple. Déterminer les équations des axes de l'hyperbole

$$x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0,$$

sachant que les axes de coordonnées forment entre eux un angle de 60^0.

Nous avons

$$\cos\theta = \cos 60^0 = \tfrac{1}{2}, \quad A = C = 1, \quad B = -\tfrac{3}{2},$$

ce qui donne

$$A - C = 0, \quad B - A\cos\theta = B - C\cos\theta = -2,$$

d'où $R' = 4$. L'équation aux axes (XX) deviendra ainsi

$$\frac{x}{y} = \mp 1$$

ce qui fournit, pour les deux axes, les équations séparées

$$x + y = 0, \quad x - y = 0.$$

9. **Autre Méthode, pour déterminer l'équation aux axes des coniques à centre.** Le procédé, que nous venons d'employer, pour déterminer les axes des coniques rapportées à leur centre, peut aussi servir à trouver les axes des coniques rapportées à une origine quelconque.

Soient x et y les coordonnées d'un sommet quelconque de la conique (1), a et b les coordonnées du centre de cette conique.

Le coefficient angulaire de l'axe, qui passe par le sommet (x, y), est

$$m = \frac{y-b}{x-a},$$

tandisque celui de la tangente au même sommet est

$$m' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Si les coordonnées sont rectangulaires, ces coefficients devront satisfaire à la condition $mm'+1 = 0$, ce qui fournit l'équation aux axes

$$(y-b)F'_x-(x-a)F'_y = 0. \tag{9}$$

On peut donner à cette équation une forme indépendante des coordonnées a et b du centre. En effet, nous avons les deux systèmes d'égalités

$$2Ax+2By+2D = F'_x, \quad 2Bx+2Cy+2E = F'_y,$$
$$2Aa+2Bb+2D = 0, \quad 2Ba+2Cb+2E = 0.$$

Prenant la différence entre les égalités, qui se correspondent verticalement, nous obtenons le système des deux équations

$$2A(x-a)+2B(y-b) = F'_x,$$
$$2B(x-a)+2C(y-b) = F'_y.$$

On en tire, pour $x-a$ et $y-b$, les valeurs

$$x-a = \frac{BF'_y-CF'_x}{2(B^2-AC)}, \quad y-b = \frac{BF'_x-AF'_y}{2(B^2-AC)}, \tag{10}$$

qui, étant substituées dans l'équation (9), la transforment dans la suivante

$$BF'^2_x-AF'_xF'_y-BF'^2_y+CF'_xF'_y = 0,$$

ou dans

$$BF'^2_x-(A-C)F'_xF'_y-BF'^2_y = 0,$$

qui n'est autre que l'équation (I) du n° 1.

* 10. Si les axes de coordonnées sont obliques, les

coefficients angulaires m et m' devront satisfaire à la relation de condition $1+mm'+(m+m')\cos\theta=0$, ce qui fournit l'équation

$$1-\frac{(y-b)F'_x}{(x-a)F'_y}+\left(\frac{y-b}{x-a}-\frac{F'_x}{F'_y}\right)\cos\theta=0,$$

ou

$$(y-b)(F'_x-\cos\theta F'_y)-(x-a)(F'_y-\cos\theta F'_x)=0.$$

En substituant à $y-b$ et $x-a$ leurs valeurs (10), on obtient l'équation aux axes

$$(BF'_x-AF'_y)(F'_x-\cos\theta)F'_y-(BF'_y-CF'_x)(F'_y-\cos\theta)F'_y=0,$$

qui n'est autre que l'équation (IV)

$$(B-C\cos\theta)F'^2_x-(A-C)F'_xF'_y-(B-A\cos\theta)F'^2_y=0$$

du n° 3.

§ II. Grandeur des axes dans les coniques à centre.

11. **Longueur des axes des coniques à centre.** Admettons d'abord que les axes de coordonnées soient rectangulaires.

Considérons la conique (5) du n° 5, ou

(1) $$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+H=0,$$

qui se trouve rapportée à son centre. Si x et y désignent les coordonnées d'un sommet quelconque et R le demi-axe, qui aboutit à ce sommet, nous avons

$$x^2+y^2=R^2.$$

Nous avons trouvé au n° 7 (formule XIII), que x et y sont liés entre eux par la relation

$$\frac{Ax+By}{x}=\frac{Bx+Cy}{y}.$$

Multiplions les deux termes de la première fraction par x, ceux de la seconde par y, et ajoutons, terme à terme, les deux fractions résultants; il nous viendra

$$\frac{Ax+By}{x}=\frac{Bx+Cy}{y}=\frac{Ax^2+2Bxy+Cy^2}{x^2+y^2}.$$

Mais, le sommet (x, y) appartenant à la conique (1), le numérateur de la troisième fraction est égal à $-H$; d'ailleurs son dénominateur est égal à R^2. Nous avons donc les deux équations

$$\frac{Ax+By}{x}=\frac{Bx+Cy}{y}=-\frac{H}{R^2},$$

qui nous fournissent les deux relations fondamentales

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} (AR^2+H)x+BR^2y=0, \\ BR^2x+(CR^2+H)y=0 \end{cases}$$

entre les coordonnées x et y d'un sommet et le demi-axe R, qui aboutit à ce sommet.

Ces deux équations sont du premier degré en x et y; elles sont d'ailleurs homogènes. Puisqu'elles sont compatibles, leur déterminant est nul; ce qui fournit l'égalité

$$\begin{vmatrix} AR^2+H & BR^2 \\ BR^2 & CR^2+H \end{vmatrix} = (AR^2+H)(CR^2+H)-B^2R^4=0.$$

Nous obtenons ainsi l'équation des axes

$$\text{(II)} \qquad (B^2-AC)R^4-(A+C)HR^2-H^2=0,$$

d'où nous tirons les carrés

$$\text{(III)} \qquad R^2=\frac{H}{2}\cdot\frac{A+C\pm\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC}$$

des demi-axes de notre conique (1).

12. **Signes qui se correspondent dans les expressions de $\frac{y}{x}$ et R^2.** Chacune des deux équations (I) représente l'axe qui contient R; on pourrait remplacer, dans l'une ou l'autre de ces équations, R^2 par ses valeurs (III), pour avoir les équations des deux axes de la conique (1), équations que nous avons déjà trouvées au n^0 7.

Nous proposons de déterminer le signe dont il faut affecter le radical dans (III) pour avoir l'équation (XV) ou l'équation (XVI) du n^0 7.

D'abord nous pouvons déterminer le coefficient angulaire $\frac{y}{x}$ de l'axe qui contient R, en tirant du système des deux équations (I) une nouvelle équation, dans laquelle le multiplicateur de y est débarrassé du facteur R^2.

Pour cela, multiplions la première des équations (I) par C, la seconde par B et retranchons le premier produit obtenu du second. Nous trouvons ainsi l'équation

$$\text{(IV)} \qquad BHy+(B^2-AC)R^2x-CHx=0.$$

On aurait de même

$$\text{(V)} \qquad BHx+(B^2-AC)R^2y-AHy=0.$$

Cela fait, l'équation (IV) ci-dessus nous donne

$$\frac{y}{x} = \frac{-(B^2 - AC)R^2 + CH}{BH};$$

mais nous avons aussi, par l'équation (XVI) du n° 7,

$$\frac{y}{x} = \frac{C - A \pm \sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}{2B}$$

Egalant ces deux expressions, on obtient l'équation

$$\frac{-(B^2 - AC)R^2 + CH}{BH} = \frac{C - A \pm \sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}{2B},$$

ou

$$-\frac{(B^2 - AC)R^2}{H} + C = \frac{C-A}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4B^2 + (A-C)^2},$$

qui donne pour R^2 la valeur

$$R^2 = \frac{H}{2} \cdot \frac{A + C \mp \sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}{B^2 - 4AC}.$$

Ainsi, dans les expressions de $\frac{y}{x}$ et R^2, qui correspondent à un même axe, le radical $\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}$ ou R doit toujours être pris avec des signes contraires.

13. **Exemple I.** Les carrés des demi-axes de la conique

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 9 = 0$$

sont

$$R^2 = -\frac{9}{2} \cdot \frac{5 + 2 \pm \sqrt{4.2^2 + (5-2)^2}}{2^2 - 5.2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{7 \pm 5}{6},$$

ou

$$R'^2 = 9, \quad R''^2 = \tfrac{3}{2}.$$

Exemple II. Calculer la longueur des axes de l'hyperbole

$$3x^2 + 12xy - 2y^2 + 294 = 0.$$

Nous avons ici

$$B^2 - AC = 42, \quad \sqrt{4B^2 + (A-C)^2} = 13, \quad H = -294.$$

Les carrés des demi-axes sont ainsi

$$R^2 = 147 \cdot \frac{1 \pm 13}{42} = \frac{7(1 \pm 13)}{2},$$

de sorte que

$$R'^2 = \frac{7(1+13)}{2} = 49, \quad R''^2 = \frac{7(1-13)}{2} = -42.$$

* 14. **Grandeur des axes pour des coordonnées obliques.** Les coordonnées x et y du sommet, auquel aboutit le demi-axe R, sont liées entre elles, dans ce cas, par la relation (XVIII) du nº 8, qui est

$$\frac{Ax+By}{x+y\cos\theta}=\frac{Bx+Cy}{y+x\cos\theta}.$$

Multiplions les deux termes du premier rapport par x, ceux du second par y, puis ajoutons terme à terme; il nous vient

$$\frac{Ax+By}{x+y\cos\theta}=\frac{Bx+Cy}{y+x\cos\theta}=\frac{Ax^2+2Bxy+Cy^2}{x^2+y^2+2xy\cos\theta}=-\frac{H}{R^2}$$

Nous en tirons les deux équations

$$\text{(VI)}\qquad \left\{\begin{array}{l}(AR^2+H)x+(BR^2+H\cos\theta)y=0,\\ (BR^2+H\cos\theta)x+(CR^2+H)y=0,\end{array}\right.$$

dont le déterminant est forcément nul.

La grandeur des demi-axes est donc fournie par l'équation

$$(BR^2+H\cos\theta)^2-(AR^2+H)(CR^2+H)=0,$$

qui revient à

$$\text{(VII)}\qquad (B^2-AC)R^4-(A-2B\cos\theta+C)HR^2-H^2\sin^2\theta=0,$$

et donne (nº 3)

(VIII)

$$R^2=\frac{H}{2}\cdot\frac{A-2B\cos\theta+C\pm\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}{B^2-AC}$$

pour les carrés des deux demi-axes de la conique.

La somme des carrés des inverses des demi-axes est égale à

$$-\frac{A-2B\cos\theta+C}{H\sin^2\theta}$$

pour des coordonnées obliques, et

$$-\frac{A+C}{H}$$

pour des coordonnées retangulaires.

Exemple. Calculer, pour $\theta=60^0$, la grandeur des axes de l'hyperbole

$$x^2-3xy+y^2+3=0.$$

Puisque $\cos\theta=\frac{1}{2}$, il vient

$$A-2B\cos\theta+C=\tfrac{7}{2};$$

on a d'ailleurs

$$A-C=0,\quad B-A\cos\theta = B-C\cos\theta = -2,$$

ce qui donne $\mathfrak{N}'=4$; et comme

$$B^2-AC=\tfrac{5}{4},\quad H=3,$$

on trouve que

$$R^2=\tfrac{3}{2}\cdot\frac{\frac{7}{2}\pm 4}{\frac{5}{4}}=\tfrac{3}{2}\cdot\frac{14\pm 16}{5}=\frac{3(7\pm 8)}{5}.$$

On en tire les valeurs

$$R'^2=\frac{3(7+8)}{5}=9,\quad R''^2=\frac{3(7-8)}{5}=-\tfrac{3}{5}.$$

15. **Méthode du cercle bitangent, pour le calcul de la grandeur des axes.** Cette méthode est simple et élégante; elle est fréquemment employée et mérite d'etre signalée.

Coupons la conique (1) par un cercle concentrique

(2) $$x^2+y^2-R^2=0.$$

L'équation

(3) $$(A+\lambda)x^2+2Bxy+(C+\lambda)y^2+H-\lambda R^2=0,$$

où λ est une constante arbitraire, représentera toutes les coniques, qui passent par les points d'intersection des deux courbes (1) et (2).

Si nous disposons de l'indéterminée λ, de manière à rendre l'équation (3) homogène, ce qui revient à poser

$$H=\lambda R^2=0,$$

ou à prendre

$$\lambda=\frac{H}{R^2},$$

l'équation

(4) $$\left(A+\frac{H}{R^2}\right)x^2+2Bxy+\left(C+\frac{H}{R^2}\right)y^2=0,$$

qui en résultera pour (3), représentera le système des deux sécantes communes aux deux courbes concentriques (1) et (2), qui passent par leur centre commun.

Ces deux sécantes (4) se réduiront évidemment à une seule, et, par suite, le cercle (2) sera bitangent à la conique (1), si le premier membre de l'équation (4) devient un carré, en d'autres termes, si l'on a

$$B^2-\left(A+\frac{H}{R^2}\right)\left(C+\frac{H}{R^2}\right)=0.$$

Dans ce cas la sécante double sera perpendiculaire aux tangentes

menées par ses extrémités. Cette sécante double sera donc un axe de la conique (1), et la valeur de R, fournie par l'équation précédente, exprimera la grandeur de la moitié de cet axe.

Nous retrouvons ainsi la même équation

$$B^2R^4 - (AR^2 + H)(CR^2 + H) = 0$$

que celle (II), qui a été fournie par la méthode du n⁰ 11.

* 16. Si les axes de coordonnées sont inclinés entre eux d'un angle θ, l'équation du cercle concentrique à la conique (1) sera

(5) $$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - R^2 = 0,$$

et les courbes du second degré, qui passent par les points d'intersection de la conique (1) et du cercle (5), seront représentées par l'équation générale

$$(A + \lambda)x^2 + 2(B + \lambda\cos\theta)xy + (C + \lambda)y^2 + H - \lambda R^2 = 0.$$

En rendant cette équation homogène par la valeur $\lambda = \frac{H}{R^2}$, l'équation résultante

$$(AR^2 + H)x^2 + 2(BR^2 + H\cos\theta)xy + (CR^2 + H)y^2 = 0$$

représentera le système des deux sécantes communes à la conique (1) et au cercle (5), qui passent par leur centre commun.

Ces deux sécantes communes se réduiront à un axe commun, si le premier membre de cette dernière équation est un carré, c'est-à-dire, si l'on a

$$(BR^2 + H\cos\theta)^2 - (AR^2 + H)(CR^2 + H) = 0.$$

On retrouve ainsi l'équation (VII) du n⁰ 14.

§ III. Sommets des coniques à centre.

17. **Carrés et Rectangle des coordonnées d'un sommet en valeur du demi-axe, qui aboutit à ce sommet.** Soient x et y les coordonnées du sommet, qui termine le demi-axe R. Lorsque les axes de coordonnées sont rectangulaires, ces trois quantités x, y et R sont liées entre elles (n⁰ 11) par les relations

(1) $$\begin{cases} BR^2x + (CR^2 + H)y = 0, \\ BR^2y + (AR^2 + H)x = 0 \end{cases}$$

ainsi que par l'égalité

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Les relations (1) nous donnent

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{y} = -\dfrac{CR^2 + H}{BR^2}, \\[2ex] \dfrac{y}{x} = -\dfrac{AR^2 + H}{BR^2}. \end{cases}$$

Mais, si l'on multiplie les relations (1) respectivement par x et y, et que l'on ajoute les produits, on aura aussi l'égalité

$$BR^2(x^2 + y^2) + [(A + C)R^2 + 2H]xy = 0,$$

d'où on tire, en se rappelant que $x^2 + y^2 = R^2$,

$$(3)\qquad xy = -\frac{BR^4}{(A + C)R^2 + 2H}.$$

Multiplions par ce produit chacun des rapports (2); il nous vient

$$(4)\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(CR^2 + H)R^2}{(A + C)R^2 + 2H}, \\[2ex] y^2 = \dfrac{(AR^2 + H)R^2}{(A + C)R^2 + 2H}. \end{cases}$$

Les expressions (4) et (3) peuvent se simplifier.

En effet, si nous multiplions par H les deux termes de chacune d'elles, le dénominateur commun deviendra

$$(A + C)HR^2 + 2H^2.$$

Mais l'équation (II) des axes (n° 11) fournit la valeur

$$\begin{aligned} (A + C)HR^2 + 2H^2 &= 2(B^2 - AC)R^4 - (A + C)HR^2 \\ &= R^2[2(B^2 - AC)R^2 - (A + C)H]; \end{aligned}$$

et, si nous posons

$$(\mathrm{I})\qquad \sqrt{4B^2 + (A - C)^2} = \mathfrak{R},$$

l'équation résolue (III) des axes (n° 11) nous donne

$$2(B^2 - AC)R^2 - (A + C)H = \pm\mathfrak{R}.$$

Nous trouvons ainsi que les expressions (4) et (3) peuvent se mettre sous la forme plus simple

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{CR^2 + H}{\pm\mathfrak{R}}, \\[2ex] y^2 = \dfrac{AR^2 + H}{\pm\mathfrak{R}}, \\[2ex] xy = \dfrac{-BR^2}{\pm\mathfrak{R}}. \end{cases}$$

18. **Coordonnées des sommets.** L'équation résolue (III) des axes (n^0 11) nous donne

$$R^2 = \frac{H}{2} \cdot \frac{A+C \pm \mathfrak{R}}{B^2-AC}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans les expressions précédentes (II), celles-ci deviennent

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{CH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)} \cdot \frac{2B^2+C(C-A)}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}, \\ y^2 &= \frac{AH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)} \cdot \frac{2B^2+A(A-C)}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}, \\ xy &= \frac{-BH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)} \cdot \frac{B(A+C)}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}. \end{aligned} \right.$$

De ces trois formules on tire les égalités

$$(x+y)^2 = \frac{(A-2B+C)H}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H\mathfrak{R}}{2(B^2-AC)} \mp \frac{(A+C)BH}{(B^2-AC)\mathfrak{R}},$$

$$(x-y)^2 = \frac{(A+2B+C)H}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H\mathfrak{R}}{2(B^2-AC)} \pm \frac{(A+C)BH}{(B^2-AC)\mathfrak{R}},$$

qui donnent les valeurs de $x+y$ et de $x-y$, par suite celles de x et de y.

Dans les formules (III), les signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs.

19. **Equation aux abscisses et Equation aux ordonnées des quatre sommets.** Soient $\pm x'$, $\pm y'$ et $\pm x''$, $\pm y''$ les coordonnées des quatre sommets. Puisque (n^0 18)

$$x'^2 = \frac{CH}{2(B^2-AC)} + \frac{H}{2(B^2-AC)} \cdot \frac{2B^2+C(C-A)}{\mathfrak{R}},$$

$$x''^2 = \frac{CH}{2(B^2-AC)} - \frac{H}{2(B^2-AC)} \cdot \frac{2B^2+C(C-A)}{\mathfrak{R}},$$

nous aurons d'abord, en ajoutant,

$$x'^2 + x''^2 = \frac{CH}{B^2-AC};$$

puis, en multipliant,

$$x'^2 x''^2 = \frac{H^2}{4(B^2-AC)^2\mathfrak{R}^2}[C^2R^2-(2B^2+C^2-AC)^2].$$

Le facteur entre crochets revient à

$$C^2[4B^2+(A-C)^2]-(2B^2+C^2-AC)^2=-4B^2(B^2-AC);$$

par suite, il vient

$$x'^2x''^2=-\frac{H^2}{B^2-AC}\cdot\frac{B^2}{4B^2+(A-C)^2}.$$

nous en concluons que x'^2 et x''^2 sont les deux valeurs que l'équation

(IV) $$(B^2-AC)x^4-CHx^2-\frac{B^2H^2}{4B^2+(A-C)^2}=0$$

fournit pour x^2.

Cette équation donne les abscisses des quatre sommets.

On verrait de même que les ordonnées des quatre sommets s'obtiennent par l'équation

(V) $$(B^2-AC)y^4-AHy^2-\frac{B^2H^2}{4B^2+(A-C)^2}=0.$$

* 20. **Carrés et rectangle des coordonnées d'un sommet en valeur du demi-axe, qui aboutit à ce sommet** (coordonnées obliques). Les relations entre x, y et R sont ici (n° 14)

$$(AR^2+H)x+(BR^2+H\cos\theta)y=0,$$
$$(CR^2+H)y+(BR^2+H\cos\theta)x=0,$$
$$x^2+y^2+2xy\cos\theta-R^2=0.$$

Elles donnent

$$\frac{x^2}{CR^2+H}=\frac{-xy}{BR^2+H\cos\theta}=\frac{y^2}{AR^2+H}$$

$$=\frac{x^2+y^2+2xy\cos\theta}{(A-2B\cos\theta+C)R^2+2H\sin^2\theta}=\frac{HR^2}{(A-2B\cos\theta+C)HR^2+2H^2\sin^2\theta}.$$

Or, en vertu de l'équation (VII) du n° 14, nous avons

$$(A-2B\cos\theta+C)HR^2+2H^2\sin^2\theta$$
$$=2(B^2-AC)R^4-(A-2B\cos\theta+C)HR^2;$$

par conséquent la dernière fraction se réduit à

$$\frac{1}{2(B^2-AC)\frac{R^2}{H}-(A-2B\cos\theta+C)};$$

ou en ayant égard à l'équation résolue (VIII) du n° 14, et en posant

(VI) $$\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}=\mathfrak{R}',$$

notre fraction devient simplement

$$\frac{1}{\pm \mathfrak{R}'}.$$

Nos égalités fournissent ainsi les expressions

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{CR^2+H}{\pm \mathfrak{R}'}, \\ y^2 = \dfrac{AR^2+H}{\pm \mathfrak{R}'}, \\ xy = \dfrac{-(BR^2+H\cos\theta)}{\pm \mathfrak{R}'}. \end{cases}$$

* 21. **Coordonnées des sommets (Axes obliques).** L'équation résolue (VIII) des axes (n⁰ 14) nous donne

$$R^2 = \frac{H}{2}\cdot\frac{A-2B\cos\theta+C\pm\mathfrak{R}'}{B^2-AC}.$$

Substituons ces valeurs dans les expressions précédentes (VII); elles deviennent

(VIII)

$$x^2 = \frac{CH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)}\cdot\frac{2B(B-C\cos\theta)+C(C-A)}{\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}},$$

$$y^2 = \frac{AH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)}\cdot\frac{2B(B-A\cos\theta)+A(A-C)}{\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}},$$

$$xy = \frac{-BH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)}\cdot\frac{B(A+C)-2AC\cos\theta}{\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}.$$

De ces trois formules on peut tirer les valeurs de $(x+y)^2$ et $(x-y)^2$, et par suite celles de x et y.

* 22. **Equation aux abscisses des quatre sommets (axes obliques).** Comme ci-dessus (n⁰ 19), on verra par la première des équations (VIII), que l'on a

$$x'^2 x''^2 = \frac{CH}{B^2-AC},$$

$$x'^2 x''^2 = -\frac{H^2}{B^2-AC}\cdot\frac{(B-C\cos\theta)^2}{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}.$$

On en conclut que

$$\text{(IX)} \quad (B^2-AC)x^4 - CHx^2 - \frac{(B-C\cos\theta)^2 H^2}{4(B-A\cos\theta)(B-C\theta\mathrm{os}\theta)+(A-C)^2} = 0$$

fournit les abscisses des quatre sommets de la conique, dans le cas où les axes de coordonnées comprennent entre eux un angle θ.

On trouverait de même que

$$\text{(X)}\quad (B^2-AC)y^4-AHy^2-\frac{(B-A\cos\theta)^2H^2}{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}=0$$

est l'équation aux ordonnées des quatre sommets dans le cas d'axes obliques.

§ IV. Foyers des coniques à centre.

23. **Carré de la demi-distance focale.** Les coniques à centre ont deux systèmes de doubles foyers: deux foyers réels, qui sont situés sur le grand axe ou l'axe transverse de la courbe, suivant que celle-ci est une ellipse ou une hyperbole; et deux foyers toujours imaginaires, qui correspondent à l'autre axe de la conique.

A ces deux systèmes de foyers répondent deux distances focales, dont la seconde est toujours imaginaire; ainsi que deux systèmes de doubles directrices, dont les deux dernières sont aussi constamment imaginaires.

Considérons la conique

$$\text{(1)}\qquad f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+H=0,$$

qui est rapportée à son centre. Les deux demi-axes R' et R'' sont données par les formules (n° 11)

$$\frac{2R'^2}{H}=\frac{A+C+\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC},$$

$$\frac{2R''^2}{H}=\frac{A+C-\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC}.$$

lorsque les axes de coordonnées sont rectangulaires.

Si donc $2c$ représente la distance focale, on aura

$$c^2=\pm(R'^2-R''^2).$$

Par conséquent les carrés des deux demi-distances focales seront

$$\text{(I)}\qquad c^2=\pm\frac{H\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC}.$$

* 24. Si les axes de coordonnées sont obliques, on trouvera, par la formule (VIII) du n° 14, que

$$\text{(II)} \qquad c^2 = \pm \frac{H\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}{B^2-AC}.$$

25. **Coordonnées des foyers.** Désignons, en général, par α, β les coordonnées du foyer situé sur le demi-axe R et par x, y celles du sommet auquel aboutit ce demi-axe. Nous avons évidemment les proportions

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{c}{R},$$

quelque soit l'angle des axes de coordonnées. On en conclut que

$$\text{(2)} \qquad \alpha^2 = \frac{c^2x^2}{R^2}, \quad \beta^2 = \frac{c^2y^2}{R^2}, \quad \alpha\beta = \frac{c^2xy}{R^2}.$$

Dans l'expression de α^2, mettons, à la place de c^2 sa valeur $\pm \frac{H\mathfrak{R}}{B^2-AC}$ tirée de (I), et, à la place de x^2, sa valeur (II) du n⁰ 17; il nous viendra

$$\alpha^2 = \frac{H}{B^2-AC}\left(C+\frac{H}{R^2}\right)$$

Mais l'équation (II) des axes (n⁰ 11), pouvant s'écrire

$$\frac{4H^2}{R^4} + 2(A+C)\frac{2H}{R^2} - 4(B^2-AC) = 0,$$

donne

$$\frac{2H}{R^2} = -(A+C) \pm \sqrt{4B^2+(A-C)^2},$$

et, par suite,

$$2C + \frac{2H}{R^2} = C - A \pm \sqrt{4B^2+(A-C)^2}.$$

On a donc en général, pour des axes rectangulaires

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{H}{2(B^2-AC)}\left[C-A\pm\sqrt{4B^2+(A-C)^2}\right], \\ \beta^2 = \dfrac{H}{2(B^2-AC)}\left[A-C\pm\sqrt{4B^2+(A-C)^2}\right], \\ \alpha\beta = \dfrac{-BH}{B^2-AC}. \end{cases}$$

26. **Equation aux abscisses dés foyers.** Soient $\pm\alpha'$ et α'' les abscisses de nos quatre foyers. Nous avons

$$\alpha'^2 = \frac{H}{2(B^2-AC)}\left[C-A+\sqrt{4B^2+(A-C)^2}\right],$$

$$\alpha''^2 = \frac{H}{2(B^2-AC)}\left[C-A-\sqrt{4B^2+(A-C)^2}\right],$$

d'où nous tirons

$$\alpha'^2+\alpha''^2 = \frac{H(C-A)}{B^2-AC},$$

$$\alpha^2\alpha''^2 = -\frac{B^2H^2}{(B^2-AC)^2}.$$

Nous en concluons que l'équation aux abscisses des foyers, et, par suite, celle aux ordonnées sont respectivement

$$\text{(IV)}\quad \left\{\begin{aligned} &(B^2-AC)\alpha^4+(A-C)H\alpha^2-\frac{B^2H^2}{B^2-AC}=0,\\ &(B^2-AC)\beta^4+(C-A)H\beta^2-\frac{B^2H^2}{B^2-AC}=0.\end{aligned}\right.$$

* 27. **Coordonnées des foyers pour des axes obliques.** Les équations (2) nous donnent

$$x^2 = \frac{R^2\alpha^2}{c^2},\quad y^2 = \frac{R^2\beta^2}{c^2},\quad xy = \frac{R^2\alpha\beta}{c^2};$$

remplaçons c^2 par sa valeur (II) du n⁰ 24, valeur que l'on peut mettre sous la forme

$$c^2 = \pm\frac{H\mathfrak{R}}{B^2-AC},$$

en tenant compte de la notation (VII) du n⁰ 14; nous aurons

$$x^2 = \frac{(B^2-AC)R^2\alpha^2}{\pm H\mathfrak{R}},\quad y^2 = \frac{(B^2-AC)R^2\beta^2}{\pm H\mathfrak{R}},\quad xy = \frac{(B^2-AC)R^2\alpha\beta}{\pm H\mathfrak{R}}.$$

Mettons ces expressions dans dans les formules (VIII) du n⁰ 21, nous obtiendrons des égalités, des quelles nous tirons les valeurs

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{H}{B^2-AC}\left(C+\frac{H}{R^2}\right),\\ \beta^2 &= \frac{H}{B^2-AC}\left(A+\frac{H}{R^2}\right),\\ \alpha\beta &= \frac{-H}{B^2-AC}\left(B+\frac{H\cos\theta}{R^2}\right).\end{aligned}\right.$$

Mais l'équation (VII) du n⁰ 14, étant mise sous la forme

$$\sin^2\theta\frac{H^2}{R^4}+(A-2B\cos\theta+C)\frac{H}{R^2}-(B^2-AC)=0,$$

puis résolue par rapport à $\frac{H}{R^2}$, nous donne, en faisant usage de l'abréviation du n° 20,

$$\frac{H}{R^2} = -\frac{A-2B\cos\theta+C}{2\sin^2\theta} \pm \frac{\mathfrak{R}'}{2\sin^2\theta}.$$

Substituons cette valeur dans les expressions (3), nous aurons enfin, pour les coordonnées des foyers, les formules

$$(\mathrm{V}) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{H}{B^2-AC}\left[\frac{A-C+2(B-C\cos\theta)\cos\theta}{2\sin^2\theta} \pm \frac{\mathfrak{R}'}{2\sin^2\theta}\right], \\ \beta^2 &= \frac{H}{B^2-AC}\cdot\left[\frac{C-A+2(B-A\cos\theta)\cos\theta}{2\sin^2\theta} \pm \frac{\mathfrak{R}'}{2\sin^2\theta}\right], \\ \alpha\beta &= \frac{-H}{B^2-AC}\left[\frac{2B-(A+C)\cos\theta}{2\sin^2\theta} \pm \frac{\mathfrak{R}'}{2\sin^2\theta}\right], \end{aligned} \right.$$

où il ne faut pas oublier que

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}' &= \sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2} \\ &= \sqrt{4(B^2-AC)\sin^2\theta+(A-2B\cos\theta+C)^2}. \end{aligned}$$

* 28. **Equation aux abscisses des foyers** (Coordonnées obliques). Par la première des trois formules (V), on trouve facilement, en séparant les signes de $\pm\mathfrak{R}'$, que

$$\alpha'^2+\alpha''^2 = \frac{H}{B^2-AC}\cdot\frac{C-A+2(B-C\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\alpha'^2\alpha''^2 = \frac{-H}{B^2-AC}\,\frac{(B-C\cos\theta)^2 H}{(B^2-AC)\sin^2\theta}.$$

Nous en concluons que

(VI)

$$(B^2-AC)\sin^2\theta\alpha^4-[C-A+2(B-C\cos\theta)\cos\theta]H\alpha^2-\frac{(B-C\cos\theta)^2H^2}{B^2-AC}=0,$$

est l'équation aux abscisses des foyers, pour des axes obliques

L'équation des coordonnées des quatre foyers est de même

(VII)

$$(B^2-AC)\sin^2\theta\beta^4-[A-C+2(B-A\cos\theta)\cos\theta]H\beta^2-\frac{(B-A\cos\theta)^2H^2}{B^2-AC}=0,$$

Si, dans ces équations, on fait $\theta=\frac{\pi}{2}$, on retrouve celles (IV), qui se rapportent à des axes de coordonnées rectangulaires.

§ V. Diamètres conjugués égaux de l'ellipse et Asymptotes de l'hyperbole.

29. **Grandeur des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.** Soit G la longueur de l'un de ces demi-diamètres. Puisque

$$2G^2 = R'^2 + R''^2,$$

la formule (II) du n⁰ 11 nous donne immédiatement

$$\text{(I)} \qquad G^2 = \frac{(A+C)H}{2(B^2-AC)}.$$

30. **Equations des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.** Soient x et y les coordonnées de l'extrémité de G, et m le coefficient angulaires de la droite OG, O étant le centre de l'ellipse

$$\text{(1)} \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + H = 0.$$

Nous avons

$$y = mx, \quad x^2 + y^2 = G^2,$$

et, par suite

$$\frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{m^2} = \frac{xy}{m} = \frac{x^2+y^2}{1+m^2} = \frac{G^2}{1+m^2},$$

d'où nous tirons

$$x^2 = \frac{G^2}{1+m^2}, \quad y^2 = \frac{G^2m^2}{1+m^2}, \quad xy = \frac{G^2m}{1+m^2}.$$

Mettons ces valeurs dans l'équation (1) de l'ellipse; celle-ci devient

$$(CG^2+H)m^2 + 2BG^2m + AG^2 + H = 0,$$

ou, en remplaçant G^2 par sa valeur (I),

$$(2B^2 + C^2 - AC)m^2 + 2(A+C)Bm + 2B^2 + A^2 - AC = 0.$$

Nous en concluons que l'équation

$$\text{(II)} \quad (2B^2 + A^2 - AC)x^2 + 2(A+C)Bxy + (2B^2 + C^2 - AC)y^2 = 0$$

est celle des deux diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

Les équations séparés de ces diamètres égaux sont

$$\text{(III)} \qquad \frac{x}{y} = \frac{-(A+C)B \pm \sqrt{(AC-B^2)[4B^2+(A-C)^2]}}{2B^2+A^2=AC},$$

ou

$$\text{(IV)} \qquad \frac{y}{x} = \frac{-(A+C)B \mp \sqrt{(AC-B^2)[4B^2+(A-C)^2]}}{2B^2+C^2-AC}.$$

31. **Angle des diamètres conjuguées de l'ellipse.** Représentons cet angle par V. Le parallélogramme construit sur ces diamètres étant égal rectangle des axes, nous avons

$$G^2 \sin V = R'R'',$$

ou (n⁰ 11)

$$G^2 \sin V = \frac{H}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Remplaçant G^2 par sa valeur (I), il vient

(V) $$\sin V = \frac{2\sqrt{AC - B^2}}{A + C}.$$

Le cosinus du même angle est

(VI) $$\cos V = \frac{-\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}{A + C},$$

d'où on déduit, pour la tangente,

(VII) $$\operatorname{tang} V = \frac{-2\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}$$

* 32. **Grandeur des diamètres conjuguées égaux de l'ellipse pour des coordonnées obliques.** L'équation (VII) du n⁰ 14 donne

$$R'^2 + R''^2 = \frac{(A - 2B\cos\theta + C)H}{B^2 - AC};$$

par conséquent, on a, pour des axes obliques,

(VIII) $$G^2 = \frac{(A - 2B\cos\theta + C)H}{2(B^2 - AC)}.$$

* 33. **Equations des diamètres conjuguées égaux de l'ellipse pour des axes obliques.** Si nous conservons les notations du n⁰ 30, nous aurons

$$\frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{m^2} = \frac{xy}{m} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}{1 + m^2 + 2m\cos\theta} = \frac{G^2}{1 + m^2 + 2m\cos\theta},$$

et, par suite

$$x^2 = \frac{G^2}{1 + m^2 + 2m\cos\theta}, \quad y^2 = \frac{G^2 m^2}{1 + m^2 + 2m\cos\theta},$$

$$xy = \frac{G^2 m}{1 + m^2 + 2m\cos\theta}$$

Mettons ces valeurs dans l'équation (1) de l'ellipse; celle-ci devient

$$(CG^2+H)m^2+2(BG^2+H\cos\theta)m+(AG^2+H)=0.$$

Si nous remplaçons G^2 par sa valeur (VIII) et m par $\frac{y}{x}$, nous trouvons que l'équation des diamètres conjuguées égaux est

(IX) $$[A(A-C)+2B(B-A\cos\theta)]x^2$$
$$+2[A(B-C\cos\theta)+C(B-A\cos\theta)xy+[C(C-A)+2B(B-C\cos\theta)]y^2=0.$$

Les équations séparées de ces diamètres égaux sont donne

(X) $$\frac{x}{y}=\frac{A(C\cos\theta-B)+C(A\cos\theta-B)}{A(A-C)+2B(B-A\cos\theta)}$$
$$\pm\frac{\sqrt{AC-B^2}\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}{A(A-C)+2B(B-A\cos\theta)},$$

(XI) $$\frac{y}{x}=\frac{A(C\cos\theta-B)+C(A\cos\theta-B)}{C(C-A)+2B(B-C\cos\theta)}$$
$$\mp\frac{\sqrt{AC-B^2}\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}{C(C-A)+2B(B-C\cos\theta)}.$$

* 34. **Angle des diamètres conguées égaux de l'ellipse pour des coordonnées obliques.** En vertu de l'équation (VII) du n⁰ 14, on a

$$R'R''=\frac{H\sin\theta}{\sqrt{AC-B^2}};$$

par suite il vient, en égard à (VIII),

$$\sin V=\frac{R'R''}{G^2}$$

ou

(X) $$\sin V=\frac{2\sqrt{AC-B^2}.\sin\theta}{A-2B\cos\theta+C}$$

pour le sinus de l'angle cherché.

Le cosinus du même angle est donc

(XI) $$\cos V=\frac{-\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}{A-2B\cos\theta+C}.$$

On en déduit, pour la tangente,

(XII) $$\operatorname{tang} V=\frac{-2\sin\theta\sqrt{AC-B^2}}{\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}.$$

35. **Equation aux asymptotes de l'hyperbole.** Il nous reste à déterminer l'équation, qui fournit les deux asymptotes de l'hyperbole

$$(2) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Cette équation représensant une hyperbole, la caractéristique $B^2 - AC$ est positive, et le radical $\sqrt{B^2 - AC}$ est réel.

Supposons que les carrés des variables ne manquent pas tous les deux dans l'équation (2), et admettons que le coefficient C de y^2 soit différent de zèro.

Résolvons l'équation (2) par rapport à y; nous obtenons l'expression

$$(3) \quad y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + E^2 - CF},$$

ou

$$y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{R}{C},$$

en représentant le radical par R.

Dans l'expression (3), rendons la quantité sous le radical un carré parfait, en y remplaçant la partie constante $E^2 - CF$ par $\frac{(BE - CD)^2}{\sqrt{B^2 - AC}}$.

Si, dans le résultat, nous représentons par y' l'ordonnée qui correspond à l'abscisse x, nous aurons l'équation

$$(4) \qquad y' = - \pm \frac{Bx + E}{C} \pm \frac{1}{C}\left(x\sqrt{B^2 - AC} + \frac{BE - CD}{\sqrt{B^2 - AC}}\right)$$

ou

$$y' = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{P}{C}.$$

où nous désignons par P le binôme affecté du double signe $\pm$.

L'équation (4) représente évidemment deux droites.

La différence entre les coordonnées de ces droites et celle de la courbe (3) sera, pour une même abscisse x,

$$y' - y = \pm\frac{1}{C}(P - R) = \pm\frac{P^2 - R^2}{C(P + R)}.$$

Mais on a

$$P^2 - R^2 = \left[(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + \frac{(BE - CD)^2}{B^2 - AC}\right]$$
$$- [(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + E^2 - CF],$$

ou

$$P^2 - R^2 = \frac{(BE - CD)^2}{B^2 - AC} - E^2 + CF,$$

qui est une quantité constante, que l'on pourra désigner par K. Il nous viendra donc

$$y'-y=\pm\frac{1}{C}\times$$
$$\times\frac{K}{x\sqrt{B^2-AC}+\frac{BE-CD}{\sqrt{B^2-AC}}+\sqrt{(B^2-AC)x^2+2(BE-CD)x+E^2-CF}},$$

ou, en divisant les deux termes de la fraction par x,

$$y'-y=\pm\frac{1}{C}\times$$
$$\times\frac{\frac{K}{x}}{\sqrt{B^2-AC}+\frac{BE-CD}{x\sqrt{B^2-AC}}+\sqrt{B^2-AC+\frac{2(BE-CD)}{x}+\frac{E^2-CF}{x^2}}}.$$

Si nous faisons croître x jusqu' à l'infini, à la limite le numérateur s'annulle pendant que le dénominateur prend la valeur finie $2C\sqrt{B^2-AC}$.

Donc les deux droites (4) rencontrent l'hyperbole (2) à l'infini.

Nous avons obtenu l'équation des deux droites (4), en remplaçant, dans l'équation (2) de l'hyperbole, la quantité

$$E^2-CF \quad \text{par} \quad \frac{(BE-CD)^2}{B^2-AC}.$$

Nous pouvons donc former l'équation de l'ensemble des deux droites (4) au moyen de l'équation (2) de l'hyperbole, en substituant, dans celle-ci, la quantité

$$\frac{(BE-CD)^2}{B^2-AC} \quad \text{à} \quad E^2-CF,$$

ou encore

$$\frac{E^2}{C}-\frac{(BE-CD)^2}{B^2-AC} \quad \text{au terme constant } F.$$

Mais nous avons

$$\frac{E^2}{C}-\frac{(BE-CD)^2}{B^2-AC}=\frac{E^2(B^2-AC)-(BE-CD)^2}{C(B^2-AC)}$$
$$=\frac{AE^2+CD^2-2BDE}{B^2-AC},$$

quantité, qui, en vertu de la relation (X) du n° 5, est égale à $F-H$.

L'ensemble des deux droites (4) est donc représenté par l'équation du second degré

(XIII) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F-H=0.$$

L'inspection de cette équation fait voir que les deux droites, qu'elles représentent, passent par le centre de l'hyperbole (2); d'ailleurs ces droites rencontrent la courbe à l'infini; donc elles sont les asymptotes de l'hyperbole (2).

On conclut de là le théorème suivant:

L'équation aux asymptotes de l'hyperbole se déduit de l'équation de la courbe, en retranchant du premier membre de cette équation le terme constant que fournit la translation de l'origine au centre de l'hyperbole.

Si a et b sont les coordonnées du centre de l'hyperbole (2), on aura

$$H=Da+Eb+F,$$

d'où on tire

$$F-H=-(Da+Eb).$$

L'équation aux asymptotes de l'hyperbole (2) sera donc aussi

(XIV) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2+D(2x-a)+E(2y-b).$$

36. **Exemple I.** Les coordonnées du centre de l'hyperbole

$$3x^2+4xy+y^2-3x-2y+21=0$$

étant

$$a=\tfrac{1}{2},\quad b=0,$$

l'équation aux asymptotes sera

$$3x^2+4xy+y^2-3x-2y+\tfrac{3}{4}=0;$$

et ces deux droites seront représentées par les équations

$$y=-2x+1\pm(x-\tfrac{1}{2}),$$

qui reviennent à

$$2x+2y-1=0,\quad 6x-2y-3=0.$$

37. **Exemple II.** L'hyperbole

$$5x^2+4xy-2x-4y+1=0,$$

ayont pour centre le point

$$a=1,\quad b=-2,$$

a pour asymptotes les deux droites

$$5x^2+4xy-2x-4y-3=0,$$

c'est-à-dire les deux lignes

$$x-1=0,\quad 5x+4y+3=0.$$

37. Si les carrés des variables manquent dans l'équation de l'hyperbole, celle-ci affectera la forme

$$(5)\qquad Bxy+Dx+Ey+G=0,$$

et donnera, en résolvant successivement par rapport à x et à y,

$$x=-\frac{Ey+G}{By+D}=-\frac{E+\frac{G}{y}}{B+\frac{D}{y}},$$

$$y=-\frac{Dx+G}{Bx+E}=-\frac{D+\frac{G}{x}}{B+\frac{E}{x}}.$$

Faisant $y=\infty$ dans la valeur de x, et $x=\infty$ dans celle de y, on obtient les équations

$$Bx+E=0,\quad By+D=0$$

de deux droites, qui rencontrent la courbe (5) à l'infini.

L'ensemble de ces deux droites est représenté par l'équation

$$(\text{XV})\qquad Bxy+Dx+Ey+\frac{DE}{B}=0,$$

qui est celle d'une conique concentrique avec l'hyperbole (5).

Celle conique est donc celle des asymtotes de notre courbe.

Comme la translation de l'origine au centre de l'hyperbole réduit son équation à

$$Bxy+G-\frac{DE}{B}=0,$$

on voit que l'équation aux asymptotes se forme encore d'après la règle énoncée ci-dessus.

Il est utile de faire remanquer que, si le carré de l'une des variables manque dans l'équation de l'hyperbole, l'une des asymptotes est parallèle à l'axe, qui correspond à cette variable.

38. **Exemple I.** Les coordonnées du centre de l'hyperbole

$$x^2 - 2xy - 2x + 4y - 1 = 0$$

sont

$$x = 2, \quad y = 1;$$

par suite l'équation aux asymptotes sera

$$x^2 - 2xy - 2x + 4y = 0;$$

elle peut s'écrire

$$(x - 2)(x - 2y) = 0,$$

et se décompose par suite dans les deux équations

$$x - 2 = 0, \quad x - 2y = 0$$

qui représentent séparément les asymptotes.

Exemple II. Dans l'hyperbole

$$2xy - 10x - 6y + 17 = 0,$$

le centre est au point

$$a = 3, \quad b = 5.$$

L'équation aux asymptotes sera donc

$$2xy - 10x - 6y + 30 = 0$$

ou

$$xy - 5x - 3y + 15 = 0;$$

elle se décompose dans les deux équations

$$x - 3 = 0, \quad y - 5 = 0,$$

qui représentent les deux asymptotes; celles-ci sont parallèles aux axes de coordonnées.

§ VI. Axe, Sommet et Tangente au sommet de la parabole.

39. **Equation de l'axe de la parabole**

(1) $$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Puisqu'on a $B^2 - AC = 0$, il vient $B = \sqrt{AC}$ *), de sorte que l'équation de la courbe peut s'écrire

(2) $$f(x, y) = (x\sqrt{A} + y\sqrt{C})^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

---

*) Si le coefficient B du double rectangle était négatif, on aurait $B = -\sqrt{AC} = \sqrt{A} \times -\sqrt{C}$, et il faudrait changer le signe de $\sqrt{C}$ dans tout ce qui va suivre.

Mise sous cette forme, l'équation de la parabole fait voir de suite que

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{C}=0$$

représente le diamètre issu de l'origine, et que

$$2Dx+2Ey+F=0$$

est l'équation de la tangente menée par l'extrémité de ce diamètre.

Soient a et b les coordonnées du sommet de la parabole (2); transportons l'origine des coordonnées en ce point, en posant

$$x=x'+a, \quad y=y'+b;$$

l'équation (2) deviendra

$$(3) \qquad (x'\sqrt{A}+y'\sqrt{C})^2+x'f'_a+y'f'_b+f(a,b)=0.$$

Supposons que les axes de coordonnées soient rectangulaires; l'axe et la tangente menée par le sommet, passant tous les deux par la nouvelle origine, seront les deux droites

$$x'\sqrt{A}+y'\sqrt{C}=0, \quad x'\sqrt{C}-y'\sqrt{A}=0,$$

dont la seconde est perpendiculaire à la première.

L'équation de la parabole sera donc, dans ce cas, de la forme

$$(4) \qquad (x'\sqrt{A}+y'\sqrt{C})^2+2p(x'\sqrt{C}-y'\sqrt{A})=0.$$

Si nous identifions les deux équations (3) et (4), nous obtenons les trois relations

$$(5) \qquad f'_a=2p\sqrt{C}, \quad f'_b=-2p\sqrt{A}, \quad f(a,b)=0,$$

qui serviront d'abord à déterminer p, puis à calculer les deux coordonnées a et b du sommet.

Les deux premières de ces égalités (5) reviennent à

$$(6) \qquad \begin{cases} Aa+Bb=-(D-p\sqrt{C}), \\ Ba+Cb=-(E+p\sqrt{A}), \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire, puisque $B=\sqrt{AC}$,

$$(a\sqrt{A}+b\sqrt{C})\sqrt{A}=-(D-p\sqrt{C}),$$
$$(a\sqrt{A}+b\sqrt{C})\sqrt{C}=-(E+p\sqrt{A}).$$

Divisant membre à membre, on obtient l'équation

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}}=\frac{D-p\sqrt{C}}{E+p\sqrt{A}},$$

de laquelle on tire pour p la valeur

$$p = \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{A+C}. \tag{I}$$

Mettons cette valeur dans les deux équations (6), elles deviennent identiques et prennent la forme

$$a\sqrt{A} + b\sqrt{C} + \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{A+C} = 0.$$

Le sommet (a, b) se trouve donc sur la droite

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{C} + \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{A+C} = 0; \tag{II}$$

et, comme cette ligne est parallèle à l'axe, l'équation (II) est elle-même cette de l'axe de la parabole (2).

40. **Règle pratique pour déterminer l'axe de la parabole.** Multiplions l'équation (II) successivement par $\sqrt{A}$ et $\sqrt{C}$, puis remplaçons $\sqrt{AC}$ par B; nous voyons que l'axe de la parabole (1) est aussi représentée par l'une ou l'autre des deux équations

$$\text{(II')} \quad \left\{ \begin{aligned} & Ax + By + \frac{AD+BE}{A+C} = 0, \\ & Bx + Cy + \frac{BD+CE}{A+C} = 0, \end{aligned} \right.$$

Faisons disparaitre le dénominateur dans la première des équations (II'); elle devient

$$A^2x + ABy + ACx + BCy + AD + BE = 0,$$

et peut s'écrire, en remplaçant AC par B^2,

$$A(Ax + By + D) + B(Bx + Cy + E) = 0,$$

ou encore

$$Af'_x + Bf'_y = 0.$$

Puisque $B = \sqrt{AC}$, cette équation revient à

$$\sqrt{A}f'_x + \sqrt{C}f'_y = 0. \tag{III}$$

Ainsi l'équation de l'axe de la parabole s'obtient, en multipliant par $\sqrt{A}$ et $\sqrt{C}$ les dérivées respectives, par rapport à x et y, du premier membre de l'équation de la courbe, et en égalant à zéro la somme des produits obtenus.

41. L'équation de l'axe de la parabole peut aussi se déduire de l'équation générale (I) du n° 1, qui fournit les deux axes des coniques quelconques, pour des coordonnées rectangulaires.

En effet puisque, dans le cas de la parabole, on a $B^2 = AC$, les équations (II) du même numéro deviennent

$$F'_x = \frac{A - C \pm (A + C)}{2\sqrt{AC}} F'_y,$$

ou

$$F'_x = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}} F'_y \quad \text{et} \quad F'_x = -\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} F'_y.$$

La première de ces deux équations re réduit à

$$\sqrt{C}(Ax + y\sqrt{AC} + D) - \sqrt{A}(x\sqrt{AC} + Cy + E) = 0,$$

ou à

$$x\sqrt{C}(A - A) - y\sqrt{A}(C - C) + D\sqrt{C} - E\sqrt{A} = 0.$$

Cette équation, pouvant s'écrire

$$(x\sqrt{C} - y\sqrt{A}) \times 0 + D\sqrt{C} - E\sqrt{A} = 0,$$

représente un axe situé à l'infini.

La seconde équation

$$\sqrt{A}F'_x + \sqrt{C}F'_y = 0$$

n'est autre que celle de l'axe (III) à distance finie, puisque $F(x, y)$ représente au n° 1 la même fonction que $f(x, y)$ au n° 39.

42. **Autre méthode pour trouver l'axe de la parabole.** L'axe de la parabole (2), étant parallèle à la droite

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{C} = 0,$$

est représenté par une équation de la forme

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{C} + \lambda = 0, \tag{7}$$

où la constante λ est à déterminer.

Pour trouver la valeur de cette constante λ, remarquons que l'équation (2) de la parabole peut s'écrire

$$(x\sqrt{A} + y\sqrt{C} + \lambda)^2 + 2(D - \lambda\sqrt{A})x + 2(E - \lambda\sqrt{C})y + F - \lambda^2 = 0.$$

Sous cette forme, on voit que la droite

$$2(D - \lambda\sqrt{A})x + 2(E - \lambda\sqrt{C})y + F - \lambda^2 = 0 \tag{8}$$

est la tangente au sommet.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, les coefficients

$$m = -\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}}, \quad m' = -\frac{D-\lambda\sqrt{A}}{E-\lambda\sqrt{C}}$$

des deux droites perpendiculaires (7) et (8) devront satisfaire à la condition

$$mm'+1=0.$$

On a ainsi une équation en λ

$$\sqrt{A}(D-\lambda\sqrt{A})+\sqrt{C}(E-\lambda\sqrt{C})=0,$$

qui donne

(IV) $$\lambda = \frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{A+C}.$$

Mettant cette valeur dans (7), on retrouve l'équation (II) de l'axe de la parabole.

43. **Equation de la tangente au sommet.** Elle s'obtient, en remplaçant dans (8) λ par sa valeur (IV).

Or, en vertu de (IV), nous avons évidemment

$$D-\lambda\sqrt{A} = \frac{CD-BE}{A+C} = \frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sqrt{C}}{A+C},$$

$$E-\lambda\sqrt{C} = \frac{AE-BD}{A+C} = \frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sqrt{A}}{A+C};$$

par suite l'équation de la tangente au sommet sera

(V)
$$x\sqrt{C}-y\sqrt{A}+\frac{(A+C)F}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}-\frac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})^2}{2(A+C)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}=0.$$

Nous pouvons transformer cette équation, en y faisant disparaître les radicaux.

Pour cela, multiplions d'abord le premier membre par $\sqrt{C}$, puis les termes des deux fractions résultantes aussi par $\sqrt{C}$; l'équation deviendra, par suite de $\sqrt{AC}=B$,

(V′) $$Cx-By+\frac{(A+C)CF}{2(CD-BE)}-\frac{(BD+CE)^2}{2(A+C)(CD-BE)}=0.$$

On verrait de même que cette équation revient à

(V″) $$Bx-Ay+\frac{(A+C)AF}{2(BD-AE)}-\frac{(AD+BE)^2}{2(A+C)(BD-AE)}=0.$$

44. **Coordonnées du sommet.** Le sommet de la parabole (2) est l'intersection de l'axe et de la tangente au sommet; nous n'avons donc qu'à résoudre le système, que forment les équations de ces deux droites. Nous prendrons ces équations sous leur forme (7) et (8), ou

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\lambda=0,$$
$$2(D-\lambda\sqrt{A})x+2(E-\lambda\sqrt{C})y+E-\lambda^2=0.$$

En les résolvant par rapport à x et y, nous obtenons les valeurs

$$(9)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{F\sqrt{C}+\lambda(\lambda\sqrt{C}-2E)}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}, \\[2ex] y=\dfrac{F\sqrt{A}+\lambda(\lambda\sqrt{A}-2D)}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}. \end{cases}$$

Si nous remplaçons λ par sa valeur (IV) et que nous fassions disparaître les radicaux, nout trouverons que les coordonnées a et b du sommet sont

$$(\mathrm{VI})\qquad \begin{cases} a=\dfrac{F\sqrt{C}}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}-\dfrac{AD+BE}{2(A+C)^2}-\dfrac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})E}{2(A+C)(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}, \\[2ex] b=\dfrac{F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}-\dfrac{CE+BD}{2(A+C)^2}-\dfrac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})D}{2(A+C)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}; \end{cases}$$

ou, en faisant disparaître les radicaux,

$$(\mathrm{VI}')\qquad \begin{cases} a=\dfrac{BF}{2(AE-BD)}-\dfrac{AD+BE}{2(A+C)^2}-\dfrac{(AD+BE)E}{2(A+C)(AE-BD)}, \\[2ex] b=\dfrac{BF}{2(CD-BE)}-\dfrac{CE+BD}{2(A+C)^2}-\dfrac{(CE+BD)D}{2(A+C)(CD-BE)}. \end{cases}$$

On peut donner à ces valeurs la forme plus simple

$$(\mathrm{VI}'')\qquad \begin{cases} a=\dfrac{BF-DE}{2(AE-BD)}+\dfrac{CD-BE}{2(A+C)^2}-\dfrac{AD+BE}{2A(A+C)}, \\[2ex] b=\dfrac{BF-DE}{2(CD-BE)}+\dfrac{AE-BD}{2(A+C)^2}-\dfrac{CE+BD}{2C(A+C)}, \end{cases}$$

où il est utile de se rappeler que

(10)

$$AE-BD=\sqrt{A}(E\sqrt{A}-D\sqrt{C}),\quad CD-BE=\sqrt{C}(D\sqrt{C}-E\sqrt{A});$$
$$AD+BE=\sqrt{A}(D\sqrt{A}+E\sqrt{C}),\quad CE+BD=\sqrt{C}(E\sqrt{C}+D\sqrt{A}).$$

45. **Equation de la parabole (2) rapportée à son sommet.** L'équation cherchée est celle (4) du n° 39, où il nous suffira de remplacer p par sa valeur (I).

Nous trouvons ainsi

$$\text{(VII)}\quad (A+C)(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2+2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(x\sqrt{C}-y\sqrt{A})=0$$

pour l'équation de la parabole (2), rapportée au sommet de cette parabole.

En multipliant successivement par A et C, on peut aussi donner à cette équation les deux formes suivantes

$$\text{(VII')}\qquad (A+C)(Ax+By)^2+2(BD-AE)(Bx-Ay)=0,$$
$$\text{(VII'')}\qquad (A+C)(Bx+Cy)^2+2(CD-BE)(Cx-By)=0.$$

* 46. **Equation de l'axe de la parabole pour des coordonnées obliques.** Mettons l'équation de notre parabole (2) sous la forme

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\lambda')^2+2(D-\lambda'\sqrt{A})x+2(E-\lambda'\sqrt{C})+F-\lambda'^2=0.$$

Si θ est l'angle des axes de coordonnées, la perpendicularité de l'axe

$$\text{(11)}\qquad x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\lambda'=0$$

et de la tangente au sommet

$$\text{(12)}\qquad 2(D-\lambda'\sqrt{A})x+2(E-\lambda'\sqrt{C})y+F-\lambda'^2=0$$

exige que l'on ait

$$1+mm'+(m+m')\cos\theta=0,$$

ou

$$\sqrt{A}(D-\lambda'\sqrt{A})+\sqrt{C}(E-\lambda'\sqrt{C})$$
$$-[\sqrt{A}(E-\lambda'\sqrt{C})+\sqrt{C}(D-\lambda'\sqrt{A})]\cos\theta=0.$$

On en tire

$$\text{(VIII)}\qquad \lambda'=\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta}{A+C-2B\cos\theta}$$

$$=\frac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{A+C-2B\cos\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{A}(D-E\cos\theta)+\sqrt{C}(E-D\cos\theta)}{A+C-2B\cos\theta}.$$

Substituant cette valeur dans (11), on obtient

$$\text{(IX)}\qquad x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\frac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{A+C-2B\cos\theta}=0$$

pour l'équation de l'axe, dans le cas de coordonnées obliques.

* 47. **Règle pratique pour écrire l'équation de l'axe de la parabole, pour des coordonnées obliques.** Multiplions l'équation (IX) par le dénominateur $A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}$, mis sous la forme

$$\sqrt{A}(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+\sqrt{C}(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A});$$

elle devient

$$\begin{aligned} &Ax(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+x\sqrt{AC}(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}) \\ &+y\sqrt{AC}(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+\quad Cy\;(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}) \\ &+\quad D\,(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+\quad E\;(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})=0, \end{aligned}$$

ou, en mettant en évidence les facteurs

$$\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}\quad\text{et}\quad\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A},$$

$$(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})(Ax+By+D)+(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})(Bx+Cy+E)=0.$$

Cette équation revient à

$$\text{(IX}'\text{)}\qquad(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})f'_x+(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})f'_y=0,$$

et prouve que

L'équation de l'axe de la parabole, pour des coordonnées obliques, s'obtient, en multipliant les dérivées, par rapport à x et y, du premier membre de l'équation de la courbe, respectivement par $\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}$ et $\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}$, et en égalant à zéro la somme des produits obtenus.

* 48. **Equation de la tangente au sommet, pour des coordonnées obliques.** Dans l'équation (12) de cette tangente, mettons, à la place de λ' sa valeur (VIII); les coefficients de l'équation deviennent

$$D-\lambda'\sqrt{A}=\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{A+C-2B\cos\theta},$$

$$E-\lambda'\sqrt{C}=\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{A+C-2B\cos\theta}.$$

L'équation de la tangente au sommet sera donc, pour des coordonnées obliques,

$$\text{(X)}\qquad(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y+\frac{(A+C-2B\cos\theta)F}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}$$
$$-\frac{[D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta]}{2(A+C-2B\cos\theta)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}=0.$$

Afin de débarrasser cette équation des radicaux, multiplions le premier membre par $\sqrt{C}$; multiplions ensuite les deux termes des deux fractions résultantes aussi par $\sqrt{C}$; l'équation deviendra

$$(X') \qquad (C-B\cos\theta)x-(B-C\cos\theta)y+\frac{(A+C-2B\cos\theta)CF}{2(CD-BE)}$$
$$-\frac{[E(C-B\cos\theta)+D(B-C\cos\theta)]^2}{2(A+C-2B\cos\theta)(CD-BE)}=0.$$

On trouverait de même que l'équation (X) peut encore se mettre sous la forme

$$(X'') \qquad (B-A\cos\theta)x-(A-B\cos\theta)y+\frac{(A+C-2B\cos\theta)AF}{2(BD-AE)}$$
$$-\frac{[E(B-A\cos\theta)+D(A-B\cos\theta)]^2}{2(A+C-2B\cos\theta)(BD-AE)}=0.$$

* 49. **Coordonnées du sommet, pour des axes obliques.** Le sommet (a, b) est l'intersection de l'axe (11) avec la parabole (2), ou l'intersection des deux droites

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\lambda'=0,$$
$$2Dx+2Ey+F+\lambda'^2=0.$$

Ces deux équations du premier degré, étant résolues par rapport à x et y, nous fournissent les valeurs (9) ou

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{F\sqrt{C}+\lambda'(\lambda'\sqrt{C}-2E)}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}, \\ y &= \frac{F\sqrt{A}+\lambda'(\lambda'\sqrt{A}-2D)}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}. \end{aligned} \right.$$

Dans l'expression $\lambda'\sqrt{C}-E$, remplaçons λ' par sa valeurs (VIII), nous aurons

$$\lambda'\sqrt{C}-E=-\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{A+C-2B\cos\theta}.$$

On trouverait de même que

$$\lambda'\sqrt{A}-D=-\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{A+C-2B\cos\theta}.$$

Substituant ces expressions, ainsi que celle de λ', dans les valeurs de x et y, on obtient, pour les coordonnées a et b du sommet les valeurs

(XI)
$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{F\sqrt{C}}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})} - \frac{E[D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta]}{2(A+C-2B\cos\theta)(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})} \\ &\quad - \frac{[D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta](\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{2(A+C-2B\cos\theta)^2}, \\ b &= \frac{F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})} - \frac{D[D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta]}{2(A+C-2B\cos\theta)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})} \\ &\quad - \frac{[D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta](\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{2(A+C-2B\cos\theta)^2}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces valeurs faisons disparaître les radicaux; elles deviennent

(XI′)
$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{BF}{2(AE-BD)} - \frac{E[AD+BE-(AE+BD)\cos\theta]}{2(A+C-2B\cos\theta)(AE-BD)} \\ &\quad - \frac{[AD+BE-(AE+BD)\cos\theta](A-B\cos\theta)}{2A(A+C-2B\cos\theta)^2}, \\ b &= \frac{BF}{2(CD-BE)} - \frac{D[CE+BD-(CD+BE)\cos\theta]}{2(A+C-2B\cos\theta)(CD-BE)} \\ &\quad - \frac{[CE+BD-(CD+BE)\cos\theta](C-B\cos\theta)}{2C(A+C-2B\cos\theta)^2}. \end{aligned}\right.$$

Si le sommet de la parabole (2) est pris pour origine des coordonnées, l'équation de la courbe prendra évidemment la forme

(14) $(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2+2p'[(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y]=0.$

Mais, si l'origine est transportée au sommet (a, b), l'équation (2) deviendra aussi

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2+xf'_a+yf'_b=0,$$

attendu que l'on a $f(a, b)=0$.

Identifiant ces deux équations, on obtient les égalités

$$f'_a = 2p'(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}),$$
$$f'_b = 2p'(\cos\theta\sqrt{C}-\sqrt{A}),$$

qui peuvent s'écrire

$$Aa+Bb+D = p'(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}),$$
$$Ba+Cb+E = p'(\cos\theta\sqrt{C}-\sqrt{A}),$$

ou bien

$$(a\sqrt{A}+b\sqrt{C})\sqrt{A} = -D+p'(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}),$$
$$(a\sqrt{A}+b\sqrt{C})\sqrt{C} = -E+p'(\cos\theta\sqrt{C}-\sqrt{A}).$$

Divisant ces deux égalités membre à membre, on obtient l'équation

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}} = \frac{-D + p'(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})}{-E + p'(\cos\theta\sqrt{C} - \sqrt{A})},$$

qui se réduit à

$$-E\sqrt{A} + p'(B\cos\theta - A) = -D\sqrt{C} + p'(C - B\cos\theta),$$

ou à

$$D\sqrt{C} - E\sqrt{A} = p'(A + C - 2B\cos\theta)$$

et donne

(XII) $$p' = \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{A + C - 2B\cos\theta}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (14), on trouve que la translation de l'origine au sommet de la parabole (2) change son équation dans la suivante

(XIII) $$(A + C - 2B\cos\theta)(x\sqrt{A} + y\sqrt{C})^2$$
$$= 2(E\sqrt{A} - D\sqrt{C})[(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})x - (\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})y].$$

Nous pouvons faire disparaître les radicaux de cette équation, en multipliant les deux membres soit par A, soit par C. Cette équation prend alors les deux nouvelles formes

(XIII') $$(A + C - 2B\cos\theta)(Ax + By)^2$$
$$= 2(AE - BD)[(B - A\cos\theta)x - (A - B\cos\theta)y],$$

(XIII'') $$(A + C - 2B\cos\theta)(Bx + Cy)^2$$
$$= 2(BE - CD)[(C - B\cos\theta)x - (B - C\cos\theta)y].$$

§ VII. Paramètre, Foyer et Directrice de la parabole.

51. **Valeur du paramètre de la parabole**

(1) $$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Si l'origine des coordonnées est transportée au sommet de la parabole, son équation (1) se réduira à (n^0 45)

(2) $$(A + C)(x\sqrt{A} + y\sqrt{C})^2 + 2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})(x\sqrt{C} - y\sqrt{A}) = 0,$$

en supposant les coordonnées rectangulaires.

Représentons par P le paramètre de la parabole, et désignons par Y et X les distances respectives d'un point quelconque (x, y) de la courbe (2) à l'axe

(3) $$x\sqrt{A} + y\sqrt{C} = 0,$$

et à la tangente au sommet

(4) $$x\sqrt{C}-y\sqrt{A}=0.$$

Nous avons évidemment

$$Y^2=2PX;$$

et, comme

$$Y=\frac{x\sqrt{A}+y\sqrt{C}}{\sqrt{A+C}},$$

$$X=\frac{x\sqrt{C}-y\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}},$$

il vient aussi

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2=2P\sqrt{A+C}(x\sqrt{C}-y\sqrt{A}),$$

pour l'équation de la parabole.

Cette équation devant être identique avec (2), on a l'égalité

$$P\sqrt{A+C}=-\frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{A+C},$$

d'où l'on tire

(I) $$P=\frac{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}{(A+C)^{\frac{3}{2}}}$$

pour l'expression du paramètre.

Puisque A et C sont nécessairement positifs, le paramètre P aura le signe de la différence $E\sqrt{A}-D\sqrt{C}$.

Si nous multiplions les deux termes de la fraction (I) successivement par $\sqrt{A}$ et $\sqrt{C}$, on trouvera que le paramètre P affecte aussi les deux formes suivantes:

(I′) $$P=\frac{AE-BD}{(A+C)\sqrt{A^2+B^2}},$$

(I″) $$P=\frac{BE-CD}{(A+C)\sqrt{B^2+C^2}}.$$

* 52. **Valeur du paramètre pour des coordonnées obliques.** Lorsque les axes de coordonnées sont obliques, la translation de l'origine au sommet change l'équation (1) de la parabole en (n° 50)

(5) $$(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})(x\sqrt{A}+x\sqrt{C})^2$$
$$=2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})[(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y]$$

La distance du point (x, y) à l'axe

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{C}=0$$

sera

$$Y=\frac{(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})\sin\theta}{\sqrt{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}}};$$

celle du même point à la tangente au sommet sera

$$X=\frac{(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y}{\sqrt{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}}},$$

Mettant ces valeurs dans l'égalité $Y^2=2PX$, on obtient aussi

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2=\frac{2P}{\sin^2\theta}\sqrt{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}}\times$$
$$\times\left[(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y\right]$$

pour l'équation de la parabole (5).

Identifiant cette équation avec (3), on trouve, pour l'expression du paramètre en cas d'axes obliques, les valeurs

$$\text{(II)}\qquad P=\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sin^2\theta}{(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{(II}')\qquad P=\frac{(AE-BD)\sin^2\theta}{(A+C-2B\cos\theta)\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}},$$

$$\text{(II}'')\qquad P=\frac{(BE-CD)\sin^2\theta}{(A+C-2B\cos\theta)\sqrt{B^2+C^2-2BC\cos\theta}}$$

53. **Coordonnées du foyer.** Représentons par u et v les coordonnées du foyer, rapporté au sommet de la parabole; par α et β les coordonnées du même point, rapporté à l'ancienne origine.

Le foyer étant situé sur l'axe de la parabole (2), les coordonnées u et v satisfont à l'équation

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{C}=0,$$

qui représente cet axe, lorsque l'origine est au sommet de la courbe. Nous avons, par suite,

$$u\sqrt{A}+v\sqrt{C}=0,$$

d'où nous tirons

$$\frac{u}{\sqrt{C}}=-\frac{v}{\sqrt{A}}.$$

Il vient ainsi

$$\frac{u^2}{C}=\frac{v^2}{A}=\frac{u^2+v^2}{A+C}=\frac{P^2}{4(A+C)},$$

attendu que la distance du foyer au sommet est égale au demi-paramètre $\frac{P}{2}$.

On en déduit

$$u=\frac{P\sqrt{C}}{2\sqrt{A+C}},\quad v=-\frac{P\sqrt{A}}{2\sqrt{A+C}}.$$

Mettant à la place de P sa valeur (I), on obtient

$$\text{(III)}\quad\left\{\begin{aligned} u&=\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sqrt{C}}{2(A+C)^2}=\frac{BE-CD}{2(A+C)^2},\\ v&=\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sqrt{A}}{2(A+C)^2}=\frac{BD-AE}{2(A+C)^2},\end{aligned}\right.$$

pour les coordonnées du foyer, rapporté au sommet de la parabole.

Puisque a et b sont les coordonnées du sommet, par rapport à l'ancienne origine, nous avons

$$\alpha=u+a,\quad \beta=v+b.$$

Substituons à u et v les valeurs précédentes (III), et, à la place de a et b, mettons leurs expressions (VI) du n⁰ 44; nous aurons, pour les coordonnées du foyer, les valeurs

$$\text{(IV)}\quad\left\{\begin{aligned} \alpha&=\frac{F\sqrt{C}}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}-\frac{D}{2(A+C)}-\frac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})E}{2(A+C)(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})},\\ \beta&=\frac{F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}-\frac{E}{2(A+C)}-\frac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})D}{2(A+C)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})};\end{aligned}\right.$$

aux quelles on peut encore donner la forme suivante

$$\text{(IV}'\text{)}\quad\left\{\begin{aligned} \alpha&=\frac{BF-DE)}{2(AE-BD)}-\frac{AD+BE}{2A(B+C)},\\ \beta&=\frac{BF-DE)}{2(CD-BE)}-\frac{CE+BD}{2C(A+C)};\end{aligned}\right.$$

Nous retrouverons ces coodonnées plus lain, au n⁰ 118, par une méthode directe.

* 54. **Coordonnées du foyer, pour des axes obliques.** L'égalité trouvée précédemment

$$\frac{u}{\sqrt{C}}=\frac{v}{-\sqrt{A}}$$

nous donne

$$\frac{u^2}{C} = \frac{v^2}{A} = \frac{2uv\cos\theta}{-2\cos\theta\sqrt{AC}} = \frac{u^2+v^2+2uv\cos\theta}{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}}$$
$$= \frac{P^2}{4(A+C-2B\cos\theta)} = \frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})^2\sin^4\theta}{4(A+C-2B\cos\theta)^4}.$$

On en tire

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} u = \dfrac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sqrt{C}\sin^2\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)^2} = \dfrac{(BE-CD)\sin^2\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)^2}, \\ v = \dfrac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sqrt{A}\sin^2\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)^2} = \dfrac{(BD-AE)\sin^2\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)^2} \end{cases}$$

pour les coordonnées du foyer, rapporté au sommet de la parabole.

Si nous augmentons ces coordonnées de celles (XI) du n⁰ 49, qui déterminent le sommet, nous aurons

(VI)

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{F\sqrt{C}}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})} - \dfrac{D-E\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)} \\ \qquad - \dfrac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{2(A+C-2B\cos\theta)} \times \dfrac{E}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}, \\ \beta = \dfrac{F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})} - \dfrac{E-D\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)} \\ \qquad - \dfrac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{2(A+C-2B\cos\theta)} \times \dfrac{D}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}. \end{cases}$$

pour les coordonnées du foyer, dans le cas d'axes obliques.

Si, dans ces expressions, on fait disparaître les radicaux, elles prendront les formes suivantes:

$$\text{(VI')}\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{BF}{2(AE-BD)} - \dfrac{D-E\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)} \\ \qquad - \dfrac{D(A-C\cos\theta)+E(B-A\cos\theta)}{2(A+C-2B\cos\theta)} \times \dfrac{E}{(AE-BD)}, \\ \beta = \dfrac{BF}{2(CD-BE)} - \dfrac{E-D\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)} \\ \qquad - \dfrac{E(C-B\cos\theta)+D(B-C\cos\theta)}{2(A+C-2B\cos\theta)} \times \dfrac{D}{CD-BE}. \end{cases}$$

55. **Equation de la droite perpendiculaire à l'axe, menée par le foyer.** Cette droite est parallèle à la tangente au sommet (V) du n⁰ 43, et passe par le point (α, β); elle est, par suite, représentée par l'équation

$$x\sqrt{C}-y\sqrt{A}-\alpha\sqrt{C}+\beta\sqrt{A}=0.$$

Or les expressions (IV) donnent

$$\alpha\sqrt{C}=\beta\sqrt{A}=\frac{(A+C)F}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}+\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})^2-(D\sqrt{A}+D\sqrt{C})^2}{2(A+C)(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})},$$

ou

$$\alpha\sqrt{C}-\beta\sqrt{A}=\frac{(A+C)F-D^2-E^2}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}+\frac{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}{A+C}.$$

L'équation de notre droite est donc

$$\text{(VII)}\qquad x\sqrt{C}-y\sqrt{A}+\frac{D^2-AF+E^2-CF}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}-\frac{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}{A+C}=0.$$

* Si les coordonnées étaient obliques, l'équation de cette droite serait

$$\text{(VIII)}\quad (\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y-\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sin^2\theta}{A+C-2B\cos\theta}$$
$$-\frac{F(A+C-2B\cos\theta)-(D^2+E^2-2DE\cos\theta)}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}=0.$$

56. **Coordonnées du pied de la directrice.** Représentons par α' et β' ces coordonnées. Nous avons évidemment

$$\alpha'=a-u,\quad \beta'=b-v.$$

Remplaçons a et b par leurs valeurs (VI) du n^0 44, u et v par leurs valeurs (III) du n^0 53, nous trouverons que

$$\text{(IX)}\qquad\left\{\begin{aligned}\alpha'&=\frac{B(D^2-AF+E^2-CF)}{2(A+C)(BD-AE)}-\frac{AD+BE}{(A+C)^2},\\ \beta'&=\frac{B(B^2-AF+E^2-CF)}{2(A+C)(BE-CD)}-\frac{CE+BD}{(A+C)^2}.\end{aligned}\right.$$

* Si les axes sont obliques, on trouvera de la même manière que

(X)

$$\left\{\begin{aligned}\alpha'&=\frac{BF}{2(AE-BD)}-\frac{D-E\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)}+\frac{(CD-BE)\sin^2\theta}{(A+C-2B\cos\theta)^2}\\ &\quad-\frac{D(A-B\cos\theta)+E(B-A\cos\theta)}{A+C-2B\cos\theta}\times\frac{E}{AE-BD},\\ \beta'&=\frac{BF}{2(CD-BE)}-\frac{E-D\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)}+\frac{(AE-BD)\sin^2\theta}{(A+C-2B\cos\theta)^2}\\ &\quad-\frac{E(C-B\cos\theta)+D(B-C\cos\theta)}{A+C-2B\cos\theta}\times\frac{D}{CD-BE}.\end{aligned}\right.$$

57. **Equation de la directrice.** La directrice est parallèle à la tangente au sommet, en même temps qu' elle passe par le point (α', β'); son équation est donc

$$x\sqrt{C}-y\sqrt{A}=\alpha'\sqrt{C}-\beta'\sqrt{A}.$$

Mettons à la place de α' et β' leurs valeurs (IX), on trouve

$$\text{(XI)}\qquad x\sqrt{C}-y\sqrt{A}=\frac{D^2-AF+E^2-CF}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}$$

pour l'équation de la directrice, pour des coordonnées rectangulaires.

Si l'on fait disparaître les radicaux, on verra que cette équation peut encore affecter les deux formes suivantes.

$$\text{(XII)}\qquad Cx-By=\frac{B(D^2-AF+E^2-CF)}{2(BD-AE)},$$

$$\text{(XIII)}\qquad Bx-Ay=\frac{B(D^2-AF+E^2-CF)}{2(CD-BE)}.$$

* Si les axes des coordonnées étaient obliques, on trouverait, par la même méthode, que l'équation de la directrice serait

$$\text{(XIV)}\qquad (\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y+\frac{F(A+C-2B\cos\theta)-(D^2+E^2-2DE\cos\theta)}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}=0.$$

Cette équation peut encore se mettre sous les deux formes suivantes

$$\text{(XV)}\qquad (B-A\cos\theta)x-(A-B\cos\theta)y+\frac{BF(A+C-2B\cos\theta)-B(D^2+E^2-2DE\cos\theta)}{2(CD-BE)}=0,$$

$$\text{(XVI)}\qquad (C-B\cos\theta)x-(B-C\cos\theta)y+\frac{BF(A+C-2B\cos\theta)-B(D^2+E^2-2DE\cos\theta)}{2(BD-AE)}=0.$$

§ VIII. Paraboles assujetties à des conditions données.

Nous nous proposons de déterminer les principales conditions analytiques, auxquelles doivent satisfaire les coefficients de l'équation générale de la parabole, pour que l'origine et les axes de coordonnées aient des positions données par rapport à la courbe.

Nous supposerons les coordonnées rectangulaires, et nous représenterons la parabole par l'équation générale

(1) $$(x\sqrt{A}+y\sqrt{B})^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

79. **L'origine est située sur l'axe de la parabole.** Pour que l'axe de la parabole passe par l'origine des coordonnées, son équation (II) du nº 39 devra être de la forme $mx+ny=0$, ce qui exige que l'on ait

(I) $$D\sqrt{A}+E\sqrt{C}=0,$$

ou bien

$$\frac{D}{\sqrt{C}}=-\frac{E}{\sqrt{A}}=\lambda,$$

où λ représente une indéterminée quelconque.

On en tire

$$D=\lambda\sqrt{C},\quad E=-\lambda\sqrt{A},$$

ce qui change notre équation (1) dans la suivante

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})+2\lambda(x\sqrt{C}-y\sqrt{A})+F=0.$$

On en conclut que l'équation

(I′) $$(mx+ny)^2+2\lambda(nx-my+p)=0$$

représente toutes les paraboles, dont l'axe passe par l'origine des coordonnées.

80. **L'origine appartient à la tangente sommet.** Dans ce cas, le terme constant de l'équation (V) du nº 43 est nul, ce qui donne

(II) $$F=\frac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})^2}{(A+C)^2}.$$

Remplaçons F par cette valeur dans l'équation (1); celle-ci devient

$$\left(x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{A+C}\right)^2+2\,\frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{A+C}(x\sqrt{C}-y\sqrt{A})=0.$$

Il s'ensuit que l'équation

(II′) $$(mx+ny+p)^2+2\lambda(nx-my)=0$$

représente toutes les paraboles, dont la tangente au sommet passe par l'origine des coordonnées.

81. **L'origine des coordonnées est au sommet de la parabole.** L'origine se trouvant à la fois sur l'axe et sur la tangente au sommet, les deux conditions (I) et (II) devront être satisfaites en même temps. On a donc simultanément

$$\text{(III)} \qquad D\sqrt{A}+E\sqrt{C}=0, \quad F=0,$$

ce qui transforme l'équation (1) en

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2+\frac{2D}{\sqrt{C}}(x\sqrt{C}-y\sqrt{A})=0.$$

On voit ainsi que l'équation

$$\text{(III')} \qquad (mx+ny)^2+2\lambda(nx-my)=0$$

représente toutes les paraboles, qui ont leur sommet à l'origine des coordonnées.

82. **L'origine se trouve sur la droite, menée par le foyer perpendiculairement à l'axe.** L'équation de cette droite (VIII), n⁰ 55, qui passe par l'origine, doit avoir son terme constant nul; on trouve ainsi l'égalité de condition

$$\text{(IV)} \qquad (A+C)^2F=(D^2-E^2)(A-C)+4DE\sqrt{AC}$$
$$=(A+C)(D^2+E^2)-2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})^2.$$

83. **L'origine est au foyer de la parabole.** Puisque l'origine se trouve sur l'axe, on a d'abord (n⁰ 79)

$$D\sqrt{A}+E\sqrt{C}=0,$$

ou

$$AD+BE=CE+BD=0.$$

En introduisant cette condition et celle de $\alpha=0$, $\beta=0$ dans les valeurs (IV') du n⁰ 53, on obtient en outre l'égalité $BF-DE=0$.

Ainsi l'origine sera au foyer de la parabole (1), si l'on a en même temps

$$\text{(V)} \qquad D\sqrt{A}+E\sqrt{C}=0, \quad BF-DE=0.$$

Ces relations de condition nous donnent

$$\frac{D}{\sqrt{C}}=-\frac{E}{\sqrt{A}}=\lambda,$$

d'où nous tirons

$$D=\lambda\sqrt{C}, \quad E=-\lambda\sqrt{A},$$

et par suite

$$BF+\lambda^2\sqrt{AC}=0, \quad \text{ou} \quad F=-\lambda^2.$$

L'équation (1) de la parabole devient dans ce cas

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2+2\lambda\left(x\sqrt{C}-y\sqrt{A}-\frac{\lambda}{2}\right)=0.$$

On en conclut que l'équation

(V') $$(mx+ny)^2-2p\left(nx-my+\frac{p}{2}\right)=0$$

représente toutes les paraboles, qui sont rapportées à leur foyer, comme origine des coordonnées.

84. **L'origine est située sur la directrice.** La directrice (XI), n⁰ 57, passant par l'origine, on a

$$D^2-AF+E^2-CF=0,$$

d'où on tire, pour la condition demandée

(VI) $$F=\frac{D^2+E^2}{A+C}.$$

L'équation générale des paraboles, dont la directrice passe par l'origine, est

(VI') $$(mx+ny)^2-(m^2+n^2)\left[\alpha(2x-\alpha)+\beta(2x-\beta)\right]=0.$$

85. **L'origine est au pied de la directrice.** L'origine étant situé à la fois sur l'axe et la directrice, on a la double condition

(VII) $$D\sqrt{A}+E\sqrt{C}=0,\quad (A+C)F=D^2+E^2$$

qui donne

$$D^2=CF,\quad E^2=AF.$$

L'équation générale des paraboles, qui sont rapportées au pied de leur directrice, est

(VII') $$(mx+ny)^2+2p(m^2+n^2)\left(nx-my+\frac{p}{2}\right)=0.$$

Deuxième Partie.

Détermination analytique des foyers dans les sections coniques.

§ I. Conditions pour qu' une fonction homogène du second degré, à trois variables, soit un carré.

86. La méthode suivante, qui fournit les équations aux foyers, repose sur la nature des conditions analytiques, aux quelles est assujetti un polynôme homogène du second degré, à trois variables, pour qu'il soit un carré, à un facteur constant près.

Nous allons déterminer ces conditions au moyen de la théorie des centres des courbes du second degré.

87. Supposons que le polynôme

$$P = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2,$$

que nous pouvons aussi désigner par $f(x, y, z)$, soit un carré, à un facteur constant près.

Dans ce cas, l'équation

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

représentera évidemment deux droites parallèles, qui se confondent.

Il s'ensuit que chaque point de la conique (1) est un centre de la ligne; par conséquent les coordonnées de l'un quelconque des points de cette conique vérifient les deux équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0.$$

Mais l'équation (1), dont le premier membre est homogène, peut aussi se mettre sous la forme

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0;$$

comme les coordonnées de chacun des points de la ligne annulent f'_x et f'_y, ces coordonnées réduiront aussi à zéro la dérivé f'_z.

Les trois équations

$$(2) \qquad f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

se trouvant satisfaites par les coordonnées de tous les points des deux droites confondues $P = 0$, représenteront précisément chacune de ces droites.

Il est d'ailleurs évident que, si les trois équations (2) sont vérifiés simultanément par toutes les valeurs de x, y, z, qui satisfont à l'équation (1), cette équation représentera une conique dont chaque point est un centre, et, par suite, représentera deux droites confondues. Donc

Pour qu' un polynôme homogène du second degré, à trois variables, soit un carré, à un facteur constant près, il faut et il suffit que ce polynôme soit égal au produit d'une constante par le carré de l'une quelconque de ses dérivées.

88. Ces conditions peuvent s'exprimer par certaines relations analytiques, auxquelles devront satisfaire les coefficients des divers termes du polynôme. Ces relations sont simples et s'obtiennent de la manière suivante.

Premier cas. Le polynôme P est complet, en d'autres termes, les six coefficients a, b, c, d, e, f sont tous différents de zéro.

Puisque les trois équations (2) ou

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}f'_x = ax + by + dz = 0, \\ \frac{1}{2}f'_y = bx + cy + ez = 0, \\ \frac{1}{2}f'_z = dx + ey + fz = 0 \end{cases}$$

représentent la même droite, leurs coefficients sont proportionnels. On obtient ainsi les égalités de rapports

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{d}{f}, \quad \frac{b}{d} = \frac{c}{e} = \frac{e}{f},$$

qui se réduisent aux trois relations de condition

$$bd = ae, \quad be = cd, \quad bf = de.$$

On a dans ce cas

$$P = \frac{1}{4a}f'^2_x = \frac{1}{4c}f'^2_y = \frac{1}{4f}f'^2_z.$$

Second cas. Le carré de l'une des variables manque dans le polynôme. Si, par exemple, le coefficient a du carré de la variable x est nul, il faudra, pour que les trois équations (3) puissent représenter la même droite, que les termes en x disparaissent aussi des deux dernières de ces équations, ou que l'on ait en outre $b = 0$, $d = 0$.

La première des équations (3) représentera alors une droite quelconque, pendant que les deux autres se réduiront à

$$cy + ez = 0,$$
$$ey + fz = 0;$$

celles-ci, pour représenter la même droite, exigent que l'on ait

$$\frac{c}{e} = \frac{e}{f}, \quad \text{ou} \quad e^2 = cf.$$

Ainsi, lorsque le polynôme P est privé du carré de l'une des variables, il faut, pour qu'il soit un carré que les deux autres termes, qui contiennent cette variable, manquent aussi dans le polynôme.

Troisième cas. L'un des trois rectangles des variables manque dans le polynôme. Admettons, par exemple, que ce soit le rectangle xy, de sorte qu' on a $b = 0$.

Les équations (3) se réduiront aux suivantes

$$ax + 0 + dz = 0,$$
$$0 + cy + ez = 0,$$
$$dx + ey + fz = 0.$$

Pour que celles-ci représentent la même droite, il faudra, en outre que l'on ait $c = 0$, $e = 0$. La seconde équation sera alors indéterminée, et les deux autres deviendront

$$ax + dz = 0,$$
$$dx + fz = 0.$$

Elles représenteront la même droite, si l'on a

$$\frac{a}{d} = \frac{d}{f} \quad \text{ou} \quad d^2 = af.$$

Donc, si le polynôme P manque de l'un des trois rectangles, pour qu'il soit un carré, il faut que l'une des deux variables, qui entrent dans ce rectangle. manque totalement dans le polynôme.

89. **En résumé,** pour qu' un polynome homogène du second degré, à trois variables, soit un carré exact, à un facteur constant près, il faut et il suffit

1° que, si le polynôme est complet, le coefficient du carré de chaque variable soit la quatrième proportionnelle au demi-coefficient du rectangle qui ne contient pas cette variable, et aux demi-coefficients des deux autres variables.

2° que, si le polynôme est incomplet, l'une des variables manque totalement dans le polynôme, et que, dans les trois termes restants, le demi-coefficient du rectangle soit moyen proportionnel entre les coefficients des deux autres termes.

90. Si le polynôme P est une fonction du second degré de deux variables x et y, on fera $z = 1$ dans tout ce qui précède; les conditions d'un carré exact seront encore exprimées par les mêmes relations que ci-dessus.

1°. Supposons que le premier membre de l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

soit un carré exact, à un facteur constant près.

Cette équation représentera deux droites confondues, et ses coefficients vérifieront les trois égalités de condition (n° 88)

(I) $$bd = ac, \quad be = cd, \quad bf = de.$$

Chacune des droites confondues sera exprimée par l'une quelconque des trois équations

(4) $$\left\{\begin{array}{l} ax + by + d = 0, \\ bx + cy + e = 0, \\ dx + ey + f = 0, \end{array}\right.$$

et l'on aura

(II) $$\begin{aligned} ax^2 + 2b\,xy + cy^2 + 2dx + 2ey + f & \\ = \frac{1}{a}(ax + by + d)^2 & \\ = \frac{1}{c}(bx + cy + e)^2 & \\ = \frac{1}{f}(dx + ey + f)^2. & \end{aligned}$$

2°. Si le premier membre de chacune des trois équations

$$\begin{aligned} ax^2 + 2b\,xy + cy^2 &= 0, \\ ax^2 + 2dx + f &= 0, \\ cy^2 + 2ex + f &= 0 \end{aligned}$$

est un carré, à un facteur constant près, les relations de condition

(III) $$b^2 - ac, \quad d^2 - af, \quad e^2 - cf$$

seront respectivement satisfaites, et l'on aura les identités

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{1}{a}(ax + by)^2 = \frac{1}{c}(bx + cy)^2,$$

$$ax^2 + 2dx + f = \frac{1}{a}(ax + d)^2 = \frac{1}{f}(dx + f)^2,$$

$$cy^2 + 2ex + f = \frac{1}{c}(cy + e)^2 = \frac{1}{f}(ex + f)^2.$$

91. Les polynômes du second degré, à cinq, quatre ou deux termes, tels que

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey,$$
$$ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \quad \text{etc.};$$

$$ax^2 + cy^2 + 2dx + f,$$
$$ax^2 + 2b\,xy + cy^2 + 2dx, \quad \text{etc.};$$

$$ax^2 + cy^2, \quad ax^2 + 2bxy,$$
$$ax^2 + 2dx, \quad ax^2 + f, \quad \text{etc.}$$

ne sauraient jamais être les produits d'un carré exact par un facteur constant.

§ II. Equations générales aux foyers des sections coniques.

92. Considérons une conique quelconque, qui soit représentée par l'équation la plus générale

(1) $$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Transportons l'origine en un point quelconque (α, β) de son plan, en faisant

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta;$$

l'équation (1) deviendra

(2) $$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta) = 0,$$

et la distance δ d'un point quelconque $M(x', y')$ de la courbe à la nouvelle origine sera, pour des axes rectangulaires,

$$\delta = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Si la nouvelle origine est un foyer de la conique (1), la distance δ sera une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées x' et y' du point M; dans ce cas l'expressien $x'^2 + y'^2$ est un carré exact à un facteur constant près.

Or, en vertu de l'équation (2), nous avons identiquement

(3) $$\lambda(x'^2 + y'^2) = (A+\lambda)x'^2 + 2Bx'y' + (C+\lambda)y'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta),$$

où λ est une constante indéterminée.

Pour que le second membre soit un carré en x' et y', à un facteur constant près, il faut et il suffit que les trois relations, analogues aux égalités (I) du n⁰ 90

$$bd = ae, \quad be = cd, \quad bf = de,$$

soient identiquement satisfaites.

Nous trouvons ainsi, entre les coordonnées α, β du foyer et la constante λ, les trois relations

(4) $$\begin{cases} Bf'_\alpha = (A+\lambda)f'_\beta, \\ Bf'_\beta = (C+\lambda)f'_\alpha; \end{cases}$$

(5) $$4Bf(\alpha, \beta) = f'_\alpha f'_\beta.$$

Si nous éliminons la constante λ entre les deux premières (4) de ces égalités, nous obtenons la relation

(6) $$Bf'_\alpha{}^2 - (A - C)f'_\alpha . f'_\beta - Bf'_\beta = 0,$$

à laquelle devront satisfaire les coordonnées α et β du foyer de la conique (1).

Si, dans cette dernière égalité (6), nous remplaçons le produit $f'_\alpha . f'_\beta$ par son équivalent $4Bf(\alpha, \beta)$, que fournit l'équation (5), nous aurons une nouvelle relation

$$f'_\alpha{}^2 - 4(A - C)f(\alpha, \beta) - f'_\beta{}^2 = 0$$

entre les coordonnées du foyer (α, β).

Nous en concluons que les foyers de la conique (1) sont les points d'intersection de deux quelconques des trois lignes du second degré

(I) $$\begin{cases} Bf'_x{}^2 - (A - C)f'_x f'_y - Bf'_y{}^2 = 0, \\ 4Bf(x, y) - f'_x f'_y = 0, \\ f'_x{}^2 - 4(A - C)f(x, y) - f'_y{}^2 = 0 \text{ *)}. \end{cases}$$

93. Les foyers des courbes du second degré sont situés sur les axes de ces courbes.

Car la première

(II) $$Bf'_x{}^2 - (A - C)f'_x f'_y - Bf'_y{}^2 = 0$$

des trois relations précédentes est précisément (n⁰ 1) l'équation aux axes de la conique (1).

94. **Coniques focales.** Les deux autres équations

(III) $$4Bf(x, y) - f'_x f'_y = 0,$$

(IV) $$f'_x{}^2 - 4(A - C)f(x, y) - f'_y{}^2 = 0$$

représentent deux courbes du second degré, qui passent chacune par les foyers de la conique donnée (1).

---

*) Cette méthode a été indiquée, d'une manière très succinte, par M. E. G., ancien élève du lycée de Reims, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*; 2e série, tome XVII, 1878, page 36. L'auteur établit, comme conditions de rationnabilité de la racine carrée d'un polynôme du second degré à deux variables, les relations

$$d^2 = af, \quad e^2 = cf, \quad de = bf.$$

En partant de là, il obtient les équations

$$4Bf(\alpha, \beta) = f'_\alpha f'_\beta, \quad 4(A - C)f(\alpha, \beta) = f'_\alpha{}^2 - f'_\beta{}^2,$$

pour celles des foyers, sans rien préjuger ni de la nature, ni du rôle de ces courbes. Là s'arrêtent ses calculs et son article.

Nous donnerons à ces courbes le nom de coniques focales.

La nature et la position des deux coniques focales se déterminent aisément, si l'on a soin de développer leurs équations.

95. **Identités à l'usage du développement des équations focales.** Nous nous proposons de calculer le carré de chacune des dérivées de la fonction, qui forme le premier membre de l'équation de notre conique donnée (1), ainsi que le produit de ces deux dérivées.

1°. Carré des dérivées. Puisqu' on a

$$f'_x = 2(Ax + By + D),$$

il vient, en élevant au carré,

$$f'^2_x = 4(A^2x^2 + 2ABxy + 2ADx + B^2y^2 + 2BDxy + D^2).$$

Mais on a

$$4Af(x, y) = 4(A^2x^2 + 2ABxy + ACy^2 + 2ADx + 2AEy + AF).$$

Retranchant la seconde identité de la première, on obtient

$$f'^2_x - 4Af(x, y) = 4[(B^2 - AC)y^2 + 2(BD - AE)y + D^2 - AF],$$

d'où on tire

$$\text{(V)} \quad f'^2_x = 4Af(x, y) + 4[(B^2 - AC)y^2 + 2(BD - AE)y + D^2 - AF].$$

On verrait de même que

$$\text{(VI)} \quad f'^2_y = 4Cf(x, y) + 4[(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + E^2 - CF].$$

2°. Produit des dérivées. On a

$$f'_x = 2(Ax + By + D), \quad f'_y = 2(Bx + Cy + E),$$

d'où on tire, en multipliant,

$$f'_x f'_y = 4[ABx^2 + (B^2 + AC)xy + BCy^2 + (BD + AE)x + (BE + CD)y + DE].$$

Mais on a aussi

$$4Bf(x, y) = 4[ABx^2 + 2B^2xy + BCy^2 + 2BDx + 2BEy + BF].$$

Il vient par suite, en retranchant,

$$f'_x f'_y - 4Bf(x, y) = -4[(B^2 - AC)xy + (BD - AE)x + (BE - CD)y + BF - DE].$$

On en tire

$$\text{(VII)} \qquad f'_x f'_y = 4Bf(x, y) \\ -4[(B^2 - AC)xy + (BD - AE)x + (BE - CD)y + BF - DE].$$

96. **Cas où la conique (1) est une parabole.** On a alors $B^2 - AC = 0$, ce qui réduit les trois identités précédentes à

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} f'^2_x = 4Af(x, y) + 4[2(BD + AE)y + D^2 - AF], \\ f'^2_y = 4Cf(x, y) + 4[2(BE - CD)x + E^2 - CF]; \end{cases}$$

$$\text{(IX)} \quad f'_x f'_y = 4Bf(x, y) - 4(BD - AE)x + (BE - CD)y + BF - DE].$$

97. **Focale asymptotique aux directions coordonnées.** La première conique focale est représentée par l'équation (III). Cette équation, en vertu de l'identité (VII), se réduit à

$$\text{(X)} \quad (B^2 - AC)xy + (BD - AE)x + (BE - CD)y + BF - DE = 0.$$

Celle-ci représente une hyperbole concentrique (n^0 5) à la conique donnée (1), et ses asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Nous lui donnerons le nom de focale asymptotique aux directions coordonnées.

Si l'on rapporte la conique donnée (1) et cette hyperbole (X) à leur centre commun, supposé unique et à distance finie, leurs équations deviendront

$$\text{(XI)} \qquad \begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + H &= 0, \\ (B^2 - AC)xy + BH &= 0, \end{aligned}$$

où H est égal au discriminant négatif de la conique donnée (1), divisé par $B^2 - AC$.

Les demi-axes de cette hyperbole sont fournis (n^0 11) par l'équation

$$(B^2 - AC)R^4 - 4B^2H^2 = 0;$$

par suite l'hyperbole est équilatère.

98. **Focale à axes parallèles aux coordonnées.** L'équation (IV) représente la seconde conique focale; comme on peut l'écrire

$$f'^2_x - 4Af(x, y) = f'^2_y - 4Cf(x, y),$$

on voit, par les identités (V) et (VI), qu'elle affecte la forme simple

$$\text{(XII)} \\ (B^2 - AC)(x^2 - y^2) + 2(BD - CD)x - 2(BD - AE)y + E^2 - CF - D^2 + AF = 0.$$

Celle-ci représente une hyperbole, qui a même centre que la

conique donnée (1), et dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Nous lui donnerons le nom de focale à axes parallèles aux coordonnées.

Si l'on rapporte cette focale à son centre, son équation deviendra

(XIII) $$(B^2-AC)(x^2-y^2)+(A-C)H=0.$$

Les demi-axes de cette hyperbole sont données par l'équation

$$(B^2-AC)R^4-(A-C)^2H^2=0.$$

Cette hyperbole focale, comme la précédente, est donc équilatère.

99. Si le rectangle des variables manque dans l'équation (1) de la conique donnée, on aura $B=0$, et la première hyperbole focale (III) se reduit à ses asymptotes, ou au système des deux axes de la courbe (1), qui lui-même est représenté par l'équation

$$f'_x \cdot f'_y=0,$$

ou par les deux droites

$$f'_x=0, \quad f'_y=0.$$

Dans ce cas, les axes de notre conique (1) sont parallèles aux axes de coordonnées.

Il faut alors faire usage de la seconde focale, dont l'équation (XII) se réduit à

$$AC(x^2-y^2)+2CDx-2AEy+D^2-AF-E^2+CF=0,$$

ou à

$$C(Ax^2+2Dx+F)+D^2=A(Cy^2+2Ex+F)+E^2.$$

100. Si, au contraire, les carrés des deux variables manquent dans l'équation (1) de la conique donnée, on aura $A=C=0$, et la seconde conique focale (IV) se réduira au système des deux axes de la courbe (1), qui lui-même est représenté par l'équation

$$f'^2_x-f'^2_y=0,$$

ou par les deux droites

$$f'_x+f'_y=0, \quad f'_x-f'_y=0.$$

Dans ce cas les axes de notre conique (1) sont parallèles aux bissectrices des angles compris entre les axes de coordonnées.

101. **En résumé**, les foyers des coniques se déterminent, en général, par l'intersection de deux droites (II),

qui sont les axes de la courbe, avec l'une ou l'autre des deux hyperboles équilatères (III) et (IV), que nous avons appelées coniques focales.

La première (III) de ces hyperboles a ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées; dans la seconde (IV), ce sont les axes de figure, qui sont parallèles aux axes de coordonnées.

Dans les cas particuliers, l'une ou l'autre de ces deux courbes focales se confond avec les axes mêmes de la conique donnée; il faut alors avoir recours à l'autre hyperbole focale.

* 102. **Détermination des foyers pour des coordonnées obliques.** La distance δ d'un point quelconque $M(x', y')$ de la conique (2) au foyer (α, β), qui en est l'origine, est, dans ce cas

$$\delta = \sqrt{x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta}.$$

On a donc identiquement, au lieu de (3), l'égalite suivante

$$\begin{gathered}\lambda(x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta)\\ = (A+\lambda)x'^2 + 2(B+\lambda\cos\theta)x'y' + (C+\lambda)y'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta).\end{gathered}$$

Pour que le second membre soit un carré, à un facteur constant près, il faut et il suffit que l'on ait (n° 90)

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &(B+\lambda\cos\theta)f'_\alpha = (A+\lambda)f'_\beta,\\ &(B+\lambda\cos\theta)f'_\beta = (C+\lambda)f'_\alpha,\\ &4(B+\lambda\cos\theta)f(\alpha,\beta) = f'_\alpha f'_\beta.\end{aligned}\right.$$

Les deux premières de ces relations donnent pour λ les valeurs

$$\lambda = \frac{Bf'_\alpha - Af'_\beta}{f'_\beta - \cos\theta f'_\alpha},$$

$$\lambda = \frac{Bf'_\beta - Cf'_\alpha}{f'_\alpha - \cos\theta f'_\beta},$$

qui, étant égalées, fournissent l'équation

$$(Bf'_\alpha - Af'_\beta)(f'_\alpha - \cos\theta f'_\beta) - (Bf'_\beta - Cf'_\alpha)(f'_\beta - \cos\theta f'_\alpha) = 0,$$

ou

$$(8)\qquad (B - C\cos\theta)f'^2_\alpha - (A - C)f'_\alpha f'_\beta - (B - A\cos\theta)f'^2_\beta = 0$$

Afin d'avoir une autre relation, indépendante de λ, entre α et β, qui soit symétrique par rapport à α et β et les dérivées, multiplions en croix les deux premières des relations (7) par la troisième; nous obtenons, après réductions, les égalités

$$f'_\alpha{}^2 = 4(A+\lambda)f(\alpha,\beta),$$
$$f'_\beta{}^2 = 4(C+\lambda)f(\alpha,\beta),$$

qui, par l'élimination de λ, nous fournissent une deuxième relation

(9) $$f'_\alpha{}^2 - 4(A-C)f(\alpha,\beta) - f'_\beta{}^2 = 0.$$

Au moyen des égalites (8) et (9), on peut obtenir deux autres relations entre α et β.

Dans l'équation (8) remplaçons $f'_\beta{}^2$ par sa valeur

$$f'_\alpha{}^2 - 4(A-C)f(\alpha,\beta)$$

tirée de (9); cette équation devient, après division par $A-C$,

(10) $$\cos\theta f'_\alpha{}^2 + 4(B - A\cos\theta)f(\alpha,\beta) - f'_\alpha f'_\beta = 0.$$

On trouverait de même, en éliminant $f'_\alpha{}^2$ entre (8) et (9)

(11) $$\cos\theta f'_\beta{}^2 + 4(B - C\cos\theta)f(\alpha,\beta) - f'_\alpha f'_\beta = 0.$$

Nous voyons ainsi, d'après les relations (8), (9), (10) et (11), que les foyers de la conique (1) sont les points d'intersection des deux premières lignes du second degré, entre elles, ou avec chacune des deux autres

(XIV) $$\begin{cases} (B - C\cos\theta)f'_x{}^2 - (A-C)f'_x f'_y - (B - A\cos\theta)f'^2 = 0, \\ f'_x{}^2 - 4(A-C)f(x,y) - f'_y{}^2 = 0, \\ \cos\theta f'_x{}^2 + 4(B - A\cos\theta)f(x,y) - f'_x f'_y = 0, \\ \cos\theta f'^2 + 4(B - C\cos\theta)f(x,y) - f'_x f'_y = 0. \end{cases}$$

* 103. La première de ces équations est celle des axes de notre conique (n⁰ 3), lorsque les coordonnées sont obliques. On trouve donc encore ici que les foyers des courbes du second degré sont situés sur les axes de ces courbes.

* 104. La seconde des équations (XIV) est celle de l'hyperbole équilatère (IV), qui a même centre que notre conique, et dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées. Elle affecte la même forme que dans le cas, où les axes sont rectangulaires.

* 105. Les deux dernières des équations (XIV) représentent deux hyperboles, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées, et qui ont même centre que la conique donnée (1).

Si l'on rapporte ces courbes focales à leur centre, leurs équations deviennent

$$(B^2 - AC)xy + (B - A\cos\theta)H = 0,$$
$$(B^2 - AC)xy + (B - C\cos\theta)H = 0.$$

Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, ces deux hyperboles se confondent avec l'hyperbole focale (III).

106. **Equations des directrices.** Lorsqu' on connaît les coordonnées d'un foyer (α, β) de la conique (1), on peut trouver immédiatement l'équation de la directrice correspondante.

Car, si α et β sont les coordonnées d'un foyer, le second membre de l'identité (3) sera, d'après la formule (II) du nº 90, égal à

$$\frac{1}{f(\alpha, \beta)}\left[\tfrac{1}{2}x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta)\right]^2;$$

par conséquent l'équation de la directrice est

$$x'f'_\alpha + y'f'_\beta + 2f(\alpha, \beta) = 0,$$

ou, par le retour à l'ancienne origine,

$$(x-\alpha)f'_\alpha + (y-\beta)f'_\beta + 2f(\alpha, \beta) = 0.$$

Comme on a

$$2f(\alpha, \beta) = \alpha f'_\alpha + \beta f'_\beta + 2(D\alpha + E\beta + F),$$

l'équation de notre directrice se réduit à

(XV) $$xf'_\alpha + yf'_\beta + 2(D\alpha + E\beta + F) = 0.$$

On retrouve ainsi la polaire du foyer (α, β).

§ III. Equations aux foyers des coniques à équation réduite.

107. **Premier cas.** L'équation de la conique ne contient pas le rectangle des variables.

Cette équation est

(1) $$f(x, y) = Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

et devient

$$Ax'^2 + Cy'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta) = 0$$

par le transfert de l'origine au foyer (α, β).

Nous avons donc

$$\lambda(x'^2 + y'^2) = (A+\lambda)x'^2 + (C+\lambda)y'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta).$$

Le second membre ne peut être un carré, que si l'on a en même temps (nº 89)

(2) $$A + \lambda = 0, \quad f'_\alpha = 0, \quad f'^2_\beta = 4(C+\lambda)f(\alpha, \beta);$$

ou

(3) $$C+\lambda=0,\quad f'_\beta=0,\quad f'^2_\alpha=4(A+\lambda)f(\alpha,\beta).$$

Chassant l'indéterminée λ de chacun des systèmes (2) et (3), on trouve que les foyers de la conique (1) sont les intersections

de l'axe $f'_x=0$ avec la courbe $f'^2_y+4(A-C)f(x,y)=0$,

et celles

de l'axe $f'_y=0$ avec la courbe $f'^2_x+4(C-A)f(x,y)=0$.

Or, pour $B=0$, l'écuation (II) des axes (n⁰ 93) se réduit à

$$f'_x\,.f'_y=0;$$

la première conique focale (III du n⁰ 94) se confond avec ces axes, tandis que l'équation (IV) de la seconde focale (n⁰ 94) conserve la même forme

$$f'^2_x-4(A-C)f(x,y)-f'^2_y=0.$$

Les foyers de la conique (1) sont donc déterminées par le système des deux équations

(I) $$\begin{cases} f'_x\,.f'_y=0 \\ f'^2_x-4(A-C)f(x,y)-f'^2_y=0 \end{cases}$$

Ce cas particulier rentre ainsi dans le cas général, si l'on a soin d'adjoindre, à l'équation des axes, celle de la conique focale, qui reste distincte des axes.

108. **Second cas.** Le carré de l'une des deux variables manque dans l'équation de la conique.

Si le terme en y^2 ne se trouve pas dans l'équation, celle-ci affecte la forme

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+2Dx+2Ey+F=0,$$

que la translation de l'origine au foyer (α,β) transforme en

$$Ax'^2+2Bx'y'+x'f'_\alpha+y'f'_\beta+f(\alpha,\beta)=0.$$

Nous avons par suite

$$\lambda(x'^2+y'^2)=(A+\lambda)x'^2+2Bx'y'+\lambda y'^2+x'f'_\alpha+y'f'_\beta+f(\alpha,\beta).$$

Pour que le second membre soit un carré, il faut et il suffit que l'on ait (n⁰ 90)

$$Bf'_\alpha=(A+\lambda)f'_\beta,$$
$$Bf'_\beta=\lambda f'_\alpha,$$

$$4Bf(\alpha, \beta) = f'_\alpha f'_\beta.$$

Ces équations sont analogues à celles (4) et (5) du cas général (n° 92); par conséquent les foyers sont les points d'intersection des axes

$$Bf'^2_x - Af'_x f'_y - Bf'^2_y = 0$$

avec la conique focale

$$4Bf(x, y) - f'_x f'_y = 0$$

Nous rentrons ainsi de nouveau dans le cas général.

109. **Troisième cas.** L'équation de la conique manque des carrés des variables.

Cette conique est représentée par l'équation

$$f(x, y) = 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

En transportant l'origine au foyer (α, β), on la change en

$$2Bx'y' + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta) = 0,$$

de sorte que l'on a

$$\lambda(x'^2 + y'^2) = \lambda x'^2 + 2Bx'y' + \lambda y'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta).$$

Le second membre sera un carré, à un facteur constant près, si l'on a simultanément

$$Bf'_\alpha = \lambda f'_\beta,$$
$$Bf'_\beta = \lambda f'_\alpha,$$
$$4Bf(\alpha, \beta) = f'_\alpha f'_\beta,$$

ce qui fournit, pour les équations aux foyers, le système

$$f'^2_x - f'^2_y = 0,$$
$$4Bf(x, y) - f'_x f'_y = 0.$$

Nous nous trouvons encore ramené au cas général, où il suffira de poser $A = 0$, $C = 0$.

110. **Quatrième cas.** Le carré d'une variable et le rectangle des deux variables manquent dans l'équation de la conique.

L'équation de celle-ci est, par exemple

$$Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

En transportant l'origine au foyer (α, β), on la transforme en

$$Cy'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta) = 0.$$

Nous avons, par conséquent,

$$\lambda(x'^2+y'^2) = \lambda x'^2+(C+\lambda)y'^2+x'f'_\alpha+y'f'_\beta+f(\alpha, \beta).$$

Le second membre sera un carré, à un facteur constant près, si l'on a

$$\lambda = 0, \quad f'_\alpha = 0, \quad f'^2_\beta = 4(C+\lambda)f(\alpha, \beta) = 0,$$

ou

(4) $$C+\lambda = 0, \quad f'_\beta = 0, \quad f'^2_\alpha = 4\lambda f(\alpha, \beta).$$

Or l'indéterminée λ ne saurait être nulle; par suite les conditions (4) sont seules admissibles.

Les foyers sont donc déterminés par les deux équations

$$f'_y = 0, \quad f'_x + 4Cf(x, y) = 0.$$

Ces deux équations rentrent encore dans celles (II) du n⁰ 93 et (IV) du n⁰ 94, qui appartiennent au cas général.

111. Il y aurait encore à considérer le cas où les termes du premier degré manquent dans l'équation de la conique, et celui où la caractéristique B^2-AC est égale à zéro. Nous les traiterons, avec développements, dans les deux paragraphes suivants.

On y verra qu'ils sont aussi compris dans le cas général, de sorte que les trois équations (I) du n⁰ 92 suffisent toujours pour trouver les foyers des courbes du second degré, quelle que soit la nature des équations, qui représentent ces courbes.

§ IV. Détermination des foyers et des directrices dans les coniques à centre.

112. Les équations aux foyers (I) du n⁰ 92, que nous avons trouvées pour des coniques rapportées à une origine quelconque, prennent une forme bien plus simple, lorsque la courbe du second degré est douée d'un centre unique et qu'elle est rapportée à ce centre comme origine des coordonnées.

Supposons que

(1) $$f(x, y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2+H = 0$$

soit l'équation de la conique donnée.

Les coordonnées de chaque point (x, y) d'un axe étant proportionnelles aux dérivées de la fonction $f(x, y)$, prises par rapport à ces coordonnées, on a

$$f'_x = 4x, \quad f'_y = 4y,$$

ce qui transforme l'équation aux axes (II) du n° 93 dans la suivante

(2) $$Bx^2 - (A - C)xy - By^2 = 0.$$

Ensuite, puisque

$$2f(x, y) = xf'_x + yf'_y + 2H,$$

l'équation (III), n° 94, de la première conique focale pourra s'écrire

$$2Bxf'_x + 2Byf'_y + 4BH - f'_x f'_y = 0,$$

ou

$$(f'_x - 2By)(2Bx - f'_x) + 4B^2xy + 4BH = 0;$$

et, comme

$$f'_x - 2By = 2Ax, \quad 2Bx - f'_y = -2Cy,$$

cette équation se réduira à

(3) $$(B^2 - AC)xy + BH = 0.$$

Pour avoir l'équation de la seconde conique focale, nous n'avons qu'à éliminer le rectangle xy entre les deux équations (2) et (3). Cette équation est donc

(4) $$(B^2 - AC)(x^2 - y^2) + (A - C)H = 0.$$

Nous voyons ainsi, par (2), (3) et (4), que

(I) $$\left\{\begin{array}{c} Bx^2 - (A - C)xy - By^2 = 0, \\ (B^2 - AC)xy + BH = 0, \\ (B^2 - AC)(x^2 - y^2) + (A - C)H = 0 \end{array}\right.$$

sont les équations aux foyers des coniques à centre, qui sont rapportées à leur centre comme origine des coordonnées.

113. **Coordonnées des foyers.** L'équation aux axes (2) se décompose dans les équations

(5) $$\frac{x}{y} = \frac{A - C \pm \mathfrak{R}}{2B},$$

ou

(6) $$\frac{y}{x} = \frac{C - A \pm \mathfrak{R}}{2B},$$

où nous avons posé la valeur absolue du radical

(II) $$\sqrt{4B^2 + (A - C)^2} = \mathfrak{R}.$$

L'équation (3) de la focale, asymptotique aux axes de coordonnées, nous donne

(7) $$xy = -\frac{BH}{B^2 - AC}.$$

Multiplions cette équation successivement par (5) et (6), et désignons, en général, comme plus haut, par α et β les coordonnées de l'un quelconque des foyers. Nous obtenons, pour les carrés des coordonnées des foyers, les valeurs

$$\alpha^2 = \frac{(C-A\mp\mathfrak{R})H}{2(B^2-AC)}, \quad \beta^2 = \frac{(A-C\mp\mathfrak{R})H}{2(B^2-AC)}.$$

Si nous mettons, à la place de $\mathfrak{R}$, son expression (II), il nous viendra les équations

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{H}{2}\cdot\frac{C-A\mp\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC}, \\ \beta^2 &= \frac{H}{2}\cdot\frac{A-C\mp\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC}, \end{aligned} \right.$$

qui donnent les coordonnées des quatre foyers de notre conique à centre (1).

Dans ces expressions, le radical donne son signe au numérateur de la fraction correspondante; par suite les deux valeurs de α^2, ainsi que celles de β^2, sont de signes contraires. Donc deux des quatre foyers sont réels et les deux autres sont imaginaires. D'ailleurs les deux foyers réels sont situés sur le même axe.

114. Equation aux abscisses et équation aux ordonnées des foyers. Dans les valeurs (II) de α^2 et de β^2, les signes supérieurs se correspondent entre eux, ainsi que les signes inférieurs; mais ces signes correspondent inversement avec les signes des axes (2) ou (3), sur les quels se trouvent ces foyers.

Si nous séparons les signes de $\pm\mathfrak{R}$, et que nous représentions par $\pm\alpha'$ et $\pm\alpha''$ les abscisses des quatre foyers de la conique (1), nous aurons

$$\alpha'^2 = \frac{(C-A-\mathfrak{R})H}{2(B^2-AC)}, \quad \alpha''^2 = \frac{(C-A+\mathfrak{R})H}{2(B^2-AC)};$$

nous en tirons, en ayant égard à la notation (II),

$$\alpha'^2+\alpha''^2 = \frac{(C-A)H}{B^2-AC},$$

$$\alpha'^2\alpha''^2 = \frac{-B^2H^2}{(B^2-AC)^2}$$

L'équation aux abscisses des quatre foyers est donc

(IV) $$(B^2-AC)\alpha^4+(A-C)H\alpha^2-\frac{B^2H^2}{B^2-AC}=0.$$

L'équation aux ordonnées des quatre foyers est de même

(V) $$(B^2-AC)\beta^4+(C-A)H\beta^2-\frac{B^2H^2}{B^2-AC}=0.$$

115. **Equation aux directrices.** La directrice, qui correspond au foyer (α, β), a pour équation (n⁰ 106)

$$xf'_\alpha+yf'_\beta+2H=0.$$

Puisque

$$f'_\alpha=2(A\alpha+B\beta), \quad f'_\beta=2(B\alpha+C\beta),$$

cette équation revient à

$$(A\alpha+B\beta)x+(B\alpha+C\beta)y+H=0;$$

et, comme celle-ci peut s'écrire

$$\alpha(Ax+By)+\beta(Bx+Cy)+H=0.$$

On voit donc que l'équation de la directrice, qui correspond au foyer (α, β), est

(8) $$\alpha f'_x+\beta f'_y+2H=0.$$

La directrice parallèle, qui correspond au foyer $(-\alpha, -\beta)$ situé sur le même axe, a de même pour équation

$$-\alpha f'_x-\beta f'_y+2H=0,$$

ou

(9) $$\alpha f'_x+\beta f'_y-2H=0.$$

L'équation, qui donne à la fois ces des directrices, sera donc le produit des deux équations (8) et (9), ou

$$(\alpha f'_x+\beta f'_y)^2-4H^2=0.$$

Si nous effectuons le carré, nous aurons

$$\alpha^2f'^2_x+2\alpha\beta f'_xf'_y+\beta^2f'^2_y=4H^2.$$

Dans cette équation, remplaçons α^2 et β^2 par leurs valeurs (III), puis $\alpha\beta$ par sa valeur $\frac{-BH}{B^2-AC}$ tirée de (7); elle devient, après réduction,

(VI) $$(C-A\mp\Re)f'^2_x+(A-C\mp\Re)f'^2_y-4Bf'_xf'_y-8(B^2-AC)H=0,$$

et constitue l'équation aux quatre directrices de notre conique à centre (1).

Cette équation est d'un emploi peu commode.

Lorsqu'on connaît les coordonnées d'un foyer (α, β) de la conique (1), il est plus avantageux de faire usage de la polaire

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + 2H = 0$$

du point (α, β). En y remplaçant α et β par les valeurs obtenues, on a immédiatement l'équation de la directrice correspondante.

116. Nous allons appliquer la méthode précédente à quelques exemples numériques.

Exemple I. Déterminer les foyers et les directrices de l'ellipse

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 24 = 0.$$

Puisque nous avons ici

$$A = 5, \quad B = 2, \quad C = 2, \quad H = 24,$$

il vient

$$B^2 - AC = -6, \quad \mathfrak{R} = \sqrt{4B^2 + (A-C)^2} = 5;$$

par suite nous avons

$$\alpha^2 = \frac{(-3 \mp 5)24}{-12} = 6 \pm 10 = \begin{cases} 16 \\ -4 \end{cases};$$

$$\beta^2 = \frac{(3 \mp 5)24}{12} = -6 \pm 10 = \begin{cases} 4 \\ -16 \end{cases}.$$

Les coordonnées des foyers ont donc pour carrés les nombres

$$\alpha'^2 = 16, \quad \beta'^2 = 4; \qquad \alpha''^2 = -4, \quad \beta''^2 = -16.$$

Pour savoir, quels sont les signes, qui doivent se correspondre dans les racines carrées des abscisses et des ordonnées, il suffira de déterminer le signe du produit des coordonnées pour un même foyer, au moyen de la courbe focale (7), qui donne

$$\alpha\beta = \frac{-2.24}{-6} = 8.$$

Ainsi les coordonnées des quatre foyers sont

$$\alpha_1 = 4, \quad \beta_1 = 2; \quad \alpha_2 = -4, \quad \beta_2 = -2;$$
$$\alpha_3 = 2\sqrt{-1}, \quad \beta_3 = -4\sqrt{-1}; \quad \alpha_4 = -2\sqrt{-1}, \quad \beta_4 = 4\sqrt{-1}.$$

On trouve ensuite, pour les deux directrices, qui correspondent aux deux foyers réels, les équations

$$2x + y + 2 = 0, \quad 2x + y - 2 = 0.$$

Exemple II. Trouver les foyers et les directrices de l'hyperbole

$$3x^2+12xy-2y^2+14=0.$$

L'équation aux axes

$$6x^2-5xy+6y^2=0$$

donne pour les deux axes les équations

$$\frac{x}{y}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{12}=\frac{5\pm13}{12},$$

ou

$$2x-3y=0, \quad 3x+2y=0.$$

L'équation de l'hyperbole focale est d'ailleurs

$$xy=\frac{-6.14}{36+6}=-2.$$

Résolvant d'abord le système des deux équations

$$2\alpha'-3\beta'=0, \quad \alpha'\beta'=-2,$$

on obtient

$$\alpha'^2=-3, \quad \beta'^2=-\tfrac{4}{3}.$$

La résolution du système des deux équations

$$3\alpha''+2\beta''=0, \quad \alpha''\beta''=-2$$

donne ensuite

$$\alpha''^2=\tfrac{4}{3}, \quad \beta''^2=3.$$

Les coordonnées des quatre foyers sont donc

$$\alpha_1=\sqrt{-3}, \quad \beta_1=\tfrac{2}{3}\sqrt{-3}; \quad \alpha_2=-\sqrt{-3}, \quad \beta_2=-\tfrac{2}{3}\sqrt{-3};$$
$$\alpha_3=\tfrac{2}{3}\sqrt{3}, \quad \beta_3=-\sqrt{3}; \quad \alpha_4=-\tfrac{2}{3}\sqrt{3}, \quad \beta_4=\sqrt{3}.$$

Les directrices, qui correspondent aux deux foyers réels, sont d'ailleurs

$$2x-3y-\frac{17}{\sqrt{3}}=0, \quad 2x-3y+\frac{17}{\sqrt{3}}=0.$$

Exemple III. Déterminer les foyers et les directrices de l'hyperbole

$$4xy-3y^2+10=0.$$

L'équation aux axes, étant

$$2x^2-3xy-2y^2=0,$$

donne, pour ces axes, les équations

$$x=\frac{3\pm5}{4}y,$$

ou

$$x-2y=0,\quad 2x+y=0.$$

L'équation de l'hyperbole focale est

$$xy=-5.$$

Résolvant le double système de deux équations

$$x-2y=0,\qquad xy=-5;$$

et

$$2x+y=0,\qquad xy=-5,$$

on trouve, pour les carrés des coordonnées des foyers, les valeurs

$$\alpha'^2=-10,\quad \beta'^2=-\tfrac{5}{2};\quad \alpha''^2=\tfrac{5}{2},\quad \beta''^2=10;$$

ce qui donne

$$\alpha_1=\sqrt{-10},\quad \beta_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{-10};\quad \alpha_2=-\sqrt{-10},\quad \beta_2=-\tfrac{1}{2}\sqrt{-10};$$
$$\alpha_3=\tfrac{1}{2}\sqrt{10},\quad \beta_3=-\sqrt{10};\quad \alpha_4=-\tfrac{1}{2}\sqrt{10},\quad \beta_4=\sqrt{10},$$

pour les coordonnées des quatre foyers.

Les directrices, qui correspondent aux deux foyers réels, sont représentées par les équations

$$x-2y-\frac{7}{\sqrt{10}}=0,\qquad x-2y+\frac{7}{10}=0.$$

Exemple IV. Trouver les coordonnées des foyers et les équations des directrices pour l'hyperbole

$$3xy-4=0.$$

Les équations des deux axes sont

$$\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{3}{2}y^2=0$$

ou

$$x-y=0,\quad x+y=0,$$

pendant que l'hyperbole focale a pour équation

$$xy=\tfrac{8}{3}.$$

On a donc

$$\alpha'^2=\beta'^2=\tfrac{8}{3};\quad \alpha''^2=\beta''^2=-\tfrac{8}{3},$$

d'où l'on tire, pour les coordonnées des quatre foyers,

$$\alpha_1=\beta_1=\tfrac{2}{3}\sqrt{6};\qquad \alpha_2=\beta_2=-\tfrac{2}{3}\sqrt{6};$$
$$\alpha_3=\tfrac{2}{3}\sqrt{-6},\quad \beta_3=-\tfrac{2}{3}\sqrt{-6};\quad \alpha_4=-\tfrac{2}{3}\sqrt{-6},\quad \beta_4=\tfrac{2}{3}\sqrt{-6}.$$

Aux deux foyers réels correspondent deux directrices, dont les équations sont

$$\sqrt{6}(x+y)-4=0, \quad \sqrt{6}(x+y)+4=0.$$

Exemple V. Calculer les coordonnées des foyers et déterminer les directrices de l'ellipse

$$4x^2+9y^2-36=0.$$

On a ici $B=0$; par suite la première hyperbole focale (4) se confond avec les deux axes; il faudra, en conséquence, avoir recours à l'autre courbe focale (6), dont l'équation se réduit à

$$AC(x^2-y^2)-(A-C)H=0,$$

où nous avons

$$A=4, \quad C=9, \quad H=-36.$$

L'équation de cette focale est donc

$$36(x^2-y^2)-5.36 \quad \text{ou} \quad x^2-y^2=5.$$

Les équations des deux axes étant

$$y=0, \quad x=0,$$

les carrés des coordonnées du foyers seront

$$\alpha'^2=5, \quad \beta'^2=0; \qquad \alpha''^2=0, \quad \beta''^2=-5;$$

ce qui donne

$$\alpha_1=\sqrt{5}, \quad \beta_1=0; \qquad \alpha_2=-\sqrt{5}, \quad \beta_2=0;$$
$$\alpha_3=0, \quad \beta_3=\sqrt{-5}; \quad \alpha_4=0, \quad \beta_4=-\sqrt{-5}.$$

Nous obtenons, par suite, pour les deux directrices réelles, les équations

$$x\sqrt{5}-9=0, \qquad x\sqrt{5}+9=0.$$

Exemple VI. Trouver les foyers et les directrices de l'hyperbole

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2=0.$$

Les équations des axes sont

$$y=0, \quad x=0;$$

et celle de l'hyperbole focale est

$$a^2b^2(x^2-y^2)-(a^2+b^2)a^2b^2=0,$$

ou

$$x^2-y^2=a^2+b^2.$$

On a donc

$$\alpha'^2=a^2+b^2, \quad \beta'^2=0; \quad \alpha''^2=0, \quad \beta''^2=-(a^2+b^2);$$

ce qui donne

$$\alpha_1 = \sqrt{a^2+b^2},\quad \beta_1 = 0;\quad \alpha_2 = -\sqrt{a^2+b^2},\quad \beta_2 = 0;$$
$$\alpha_3 = 0,\quad \beta_3 = \sqrt{-(a^2+b^2)};\quad \alpha_4 = 0,\quad \beta_4 = -\sqrt{-(a^2+b^2)}$$

pour les coordonnées des quatre foyers.

L'équation de la directrice, qui correspond au premier foyer réel (α_1, β_1), est

$$xf'_{\alpha_1} + yf'_{\beta_1} + 2H = 0,$$

ou

$$-b^2x\sqrt{a^2+b^2} + a^2b^2 = 0;$$

par suite les équations des deux directrices réelles seront

$$x\sqrt{a^2+b^2} = a^2,\quad x\sqrt{a^2+b^2} = -a^2.$$

§ V. Foyer et Directrice de la parabole.

117. **Equations au foyer de la parabole.** L'équation

$$(1)\qquad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

représente une parabole pour $B^2 - AC = 0$.

Si les coordonnées sont rectangulaires, les axes de la courbe sont fournis (n⁰ 1) par l'équation générale

$$Bf'^2_x - (A-C)f'_xf'_y - Bf'^2_y = 0,$$

qui donne

$$f'_x = \frac{A-C \pm \sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{2B}f'_y.$$

Puisqu'on a $B^2 = AC$, le radical se réduit à $A+C$, et les équations des deux axes sont

$$(2)\qquad Bf'_x - Af'_x = 0,\quad Bf'_x + Cf'_y = 0.$$

La première de ces deux équations représente une droite située à l'infini; la seconde qui revient à

$$\sqrt{A}f'_x + \sqrt{C}f'_y = 0$$

est celle d'une droite perpendiculaire à la première, et représente l'axe de la parabole, qui se trouve à une distance finie; le développement de cette équation est

$$(3)\qquad (A+C)(x\sqrt{A}+y\sqrt{C}) + D\sqrt{A} + E\sqrt{C} = 0.$$

La première ligne focale

$$4Bf(x, y) - f'_xf'_y = 0,$$

d'après l'identité (IX) du n° 96, se réduit à

$$(BD-AE)x+(BE-CD)y+BF-DE=0,$$

ou a

(4) $$(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(x\sqrt{A}-y\sqrt{C})+BF-DE=0;$$

pendant que la seconde ligne focale

$$f'^2_x-4Af(x,y)=f'^2_y-4Cf(x,y),$$

en vertu des identités (VIII), devient

$$2(BE-CD)x-2(BD-AE)y+E^2-CF-D^2+AF=0,$$

ou

$$2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(x\sqrt{C}+y\sqrt{A})+D^2-AF-E^2+CF=0.$$

Le foyer de la parabole (1) se trouve donc à l'intersection de deux quelconques des trois droites

(I) $$\left\{\begin{aligned} & x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{A+C}=0 \\ & x\sqrt{A}-y\sqrt{C}+\frac{BF-DE}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}=0 \\ & x\sqrt{C}+y\sqrt{A}+\frac{(D^2-AF)-(E^2-CF)}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}=0 \end{aligned}\right.$$

118. **Coordonnées du foyer de la parabole.** Ce foyer est l'intersection, par exemple, des deux premières droites (I). Ajoutant et retranchant successivement leurs équations et représentant par α et β les coordonnées du foyer, on trouve que

$$\alpha=\frac{BF-DE}{2(AE-BD)}-\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{2(A+C)\sqrt{A}},$$

$$\beta=\frac{BF-DE}{2(CD-BE)}-\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{2(A+C)\sqrt{C}}$$

ou

(II) $$\left\{\begin{aligned} & \alpha=\frac{BF-DE}{2(AE-BD)}-\frac{AD+BE}{2A(A+C)}, \\ & \beta=\frac{BF-DE}{2(CD-BE)}-\frac{CE+BD}{2C(A+C)} \end{aligned}\right.$$

pour les valeurs qui déterminent le foyer.

Ces valeurs peuvent encore se mettre sous la forme

(III)

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{-F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})} - \dfrac{D}{2(A+C)} + \dfrac{E(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})}{2(A+C)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}, \\ \beta = \dfrac{F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})} - \dfrac{E}{2(A+C)} - \dfrac{D(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})}{2(A+C)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}, \end{cases}$$

que nous avons déjà obtenue, au n⁰ 53, par une autre méthode moins directe.

119. **Equation de la directrice.** Cette droite est la polaire du foyer (α, β) et a pour équation

(5) $$xf'_\alpha + yf'_\beta + 2(D\alpha + E\beta + F) = 0.$$

Il nous suffira donc de calculer les dérivées de l'équation (1) de la parabole par rapport aux coordonnées α et β du foyer.

Or, le foyer (α, β) étant situé sur l'axe, on a la relation

(6) $$\sqrt{A}f'_\alpha + \sqrt{C}f'_\beta = 0.$$

D'autre part, puisque

$$f'_\alpha = 2(A\alpha + B\beta + D) = 2\sqrt{A}(\alpha\sqrt{A} + \beta\sqrt{C}) + 2D,$$
$$f'_\beta = 2(B\alpha + C\beta + E) = 2\sqrt{C}(\alpha\sqrt{A} + \beta\sqrt{C}) + 2E,$$

on trouve, par l'élimination de $\alpha\sqrt{A} + \beta\sqrt{C}$, l'identité

(7) $$\sqrt{C}f'_\alpha - \sqrt{A}f'_\beta = 2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A}).$$

Celle-ci, étant combinée avec (6), nous donne de suite

(IV) $$\begin{cases} f'_\alpha = \dfrac{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sqrt{C}}{A+C} = \dfrac{2(CD-BE)}{A+C} \\ f'_\beta = \dfrac{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sqrt{A}}{A+C} = \dfrac{2(AE-BD)}{A+C} \end{cases}$$

Nous avons ensuite, par les valeurs (III),

$$D\alpha + E\beta + F = -\frac{F}{2} - \frac{D^2+E^2}{2(A+C)} + F$$

ou

(8) $$D\alpha + E\beta + F = \frac{F(A+C) - D^2 - E^2}{2(A+C)}.$$

Si nous substituons les expressions (IV) et (8) dans l'équation (5), nous trouvons

(V) $$2(CD-BE)x + 2[AE-BD)y = D^2 - AF + E^2 - CF$$

pour l'équation de la directrice.

Si l'on observe que

$$CD - BE = (D\sqrt{C} - E\sqrt{A})\sqrt{C},$$
$$AE - BD = (E\sqrt{A} - D\sqrt{C})\sqrt{A},$$

l'équation précédente pourra encore se mettre sous la forme

$$\text{(VI)} \qquad x\sqrt{C} - y\sqrt{A} = \frac{D^2 - AF + E^2 - CF}{2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})}.$$

120. Appliquons cette méthode à quelques équations numériques.

Exemple I. Déterminer le foyer et la directrice de la parabole

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 22x + 46y + 9 = 0.$$

Dans l'équation de l'axe

$$\sqrt{A}f'_x + \sqrt{C}f'_y = 0$$

posons

$$\sqrt{A} = 3, \quad \sqrt{C} = 4,$$
$$f'_x = 2(9x + 12y + 11), \quad f'_y = 2(12x + 16y + 23),$$

elle deviendra

$$3(9x + 12y + 11) + 4(12x + 16y + 23) = 0,$$

ou, en effectuant et divisant par 25,

$$3x + 4y + 5 = 0.$$

Dans l'équation de la droite focale

$$x\sqrt{A} - y\sqrt{C} + \frac{BF - DE}{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}} = 0,$$

faisons

$$\sqrt{A} = 3, \quad \sqrt{C} = 4, \quad B = 12, \quad D = 11, \quad E = 23, \quad F = 9;$$

elle devient

$$3x - 4y + \tfrac{29}{5} = 0.$$

Cette dernière équation, étant combinée avec celle de l'axe

$$3x + 4y + 5 = 0,$$

nous donne pour les coordonnées du foyer

$$\alpha = -\tfrac{9}{5}, \quad \beta = \tfrac{1}{10}.$$

Nous en concluons que

$$f'_\alpha = -8, \quad f'_\beta = 6, \quad 2(D\alpha + E\beta + F) = 17;$$

l'équation de la directrice sera donc

$$4x - 3y - \tfrac{17}{2} = 0.$$

Exemple II. Trouver le foyer et la directrice de la parabole

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 2y - 1 = 0.$$

Nous ferons usage, pour déterminer le foyer, des deux équations

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{C} + \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{A + C} = 0,$$

$$x\sqrt{A} - y\sqrt{C} + \frac{BF - DE}{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}} = 0,$$

dont la première est celle de l'axe, et l'autre celle d'une seconde droite passant par le foyer.

Puisque

$$\sqrt{A} = 2, \quad \sqrt{C} = 1, \quad B = 2, \quad D = -3, \quad E = -1, \quad F = 1,$$

ces deux équations deviennent

$$2x + y - \tfrac{7}{5} = 0,$$
$$2x - y + 4 = 0.$$

et donnent, pour le foyer, les coordonnées

$$\alpha = -\tfrac{13}{20}, \quad \beta = \tfrac{27}{10}.$$

D'après cela, il vient

$$f'\alpha = -\tfrac{2}{5}, \quad f'\beta = \tfrac{4}{5},$$
$$2(D\alpha + E\beta + F) = -\tfrac{4}{5}.$$

L'équation de la directrice sera donc

$$x - 2y + 2 = 0.$$

Exemple III. Calculer les coordonnées du foyer et trouver l'équation de la directrice pour la parabole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

Cette parabole touche les deux axes de coordonnées à des distances de l'origine respectivement égales à a et b. Son équation peut se mettre sous la forme

$$b^2x^2 - 2ab\,xy + a^2y^2 - 2ab^2x - 2a^2by + a^2b^2 = 0.$$

Nous avons par suite

$$\sqrt{A} = b, \quad \sqrt{C} = -a, \quad D = -ab^2, \quad E = -a^2b,$$

ce qui donne

$$bx - ay + ab.\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 0,$$

ou

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 0$$

pour l'équation de l'axe.

L'équation de la ligne focale

$$x\sqrt{A} - y\sqrt{C} + \frac{BF - DE}{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}} = 0$$

est ici

$$bx + ay - ab = 0,$$

ou

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Les coordonnées du foyer sont donc

$$\alpha = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \quad \beta = \frac{a^2b}{a^2 + b^2}.$$

Comme on a

$$f'_\alpha = -\frac{4a^3b^2}{a^2 + b^2}, \quad f'_\beta = -\frac{4a^2b^3}{a^2 + b^2},$$

$$2(D\alpha + E\beta + F) = 0,$$

l'équation de la directrice est

$$ax + by = 0,$$

ou

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 0;$$

elle passe par l'origine des coordonnées, et coupe l'axe de la parabole au point

$$x = \frac{ab^2(b^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)^2}, \quad y = \frac{a^2b(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Exemple IV. Déterminer le foyer et la directrice de la parabole

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 7 = 0.$$

L'équation de l'axe est

$$x + y + \tfrac{1}{2} = 0;$$

celle de notre corde focale est

$$x - y - 7 = 0;$$

6*

par suite les coordonnées du foyer sont

$$\alpha = \tfrac{13}{4}, \quad \beta = -\tfrac{15}{4}.$$

On en déduit

$$f'_\alpha = 1, \quad f'_\beta = -1, \quad 2(D\alpha + E\beta + F) = -\tfrac{1}{2};$$

ce qui fournit l'équation

$$x - y - \tfrac{1}{2} = 0$$

pour celle de la directrice.

Exemple V. Trouver le foyer et la directrice de la parabole

$$x^2 - 2xy + y^2 + y = 0$$

L'axe a pour équation

$$x - y - \tfrac{1}{4} = 0,$$

pendant que la corde focale est représentée par

$$x + y = 0.$$

Les coordonnées du foyer sont donc

$$x = \tfrac{1}{8}, \quad y = -\tfrac{1}{8},$$

ce qui fournit

$$x + y - \tfrac{1}{4} = 0$$

pour l'équation de la directrice.

Exemple VI. Calculer les coordonnées du foyer et trouver l'équation de la directrice pour la parabole

$$y^2 - 2px = 0.$$

Les équations de l'axe et de notre seconde corde focale sont

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{p}{2};$$

de sorte que

$$\alpha = \frac{p}{2}, \quad y = 0$$

sont les coordonnées du foyer.

L'équation de la directrice est donc

$$2x + p = 0.$$

Troisième Partie.

Les Coniques à centre déterminées par leur centre et les extrémités de deux demi-diamètres conjugués.

121. Supposons qu' une conique à centre soit rapportée à deux axes quelconques Ox et Oy, issus de son centre O.

Soient x' et y', x'' et y'' les coordonnées, qui déterminent les extrémitées de deux demi-diamètres conjugués quelconques OD' et OD''.

Si la conique est une ellipse, ces deux systèmes de coordonnées sont réels; si la courbe est une hyperbole, le premier système seul est réel et le second système est imaginaire, de sorte que nous pourrons poser, dans ce cas,

$$x'' = x_2\sqrt{-1}, \quad y'' = y_2\sqrt{-1},$$

où x_2 et y_2 sont deux quantités réelles.

La conique est évidemment déterminée par le centre O et les extrémités D' et D'' de deux demi-diamètres conjuguées. C'est ce qu'il est aisé d'établir directement.

122. **Equation de la conique.** Notre conique (ellipse ou hyperbole) est représentée par l'équation

$$\text{(I)} \qquad (x'y-y'x)^2+(x''y-y''x)^2 = (x'y''-y'x'')^2.$$

En effet, 1⁰ l'équation (I), étant du second degré par rapport aux variables x et y, représente une conique.

2⁰. Cette conique a un centre et se trouve rapportée à ce centre, comme origine des coordonnées, puisque, n'étant pas homogène, l'équation (I) manque de termes du premier degré en x et y.

3⁰. Les points (x', y') et (x'', y'') appartiennent à la courbe: car, si l'on remplaçe, dans l'équation (I), x et y d'abord par x' et y' puis par x'' et y'', cette équation est chaque fois identiquement satisfaite.

4⁰. Les droites

$$(1) \qquad x'y-y'x = 0, \quad x''y-y''x = 0$$

sont les directions de deux diamètres conjuguées de la conique.

Car, si l'on développe les deux carrés du premier membre de l'équation (I), celle-ci peut s'écrire

$$(2)\quad (y'^2+y''^2)x^2-2(x'y'+x''y'')xy+(x'^2+x''^2)y^2-(x'y''-y'x'')^2=0,$$

et fait ainsi voir que les coefficients angulaires

$$m'=\frac{y'}{x'},\quad m''=\frac{y''}{x''}$$

de nos deux droites (1) satisfont à la relation générale

$$A+B(m'+m'')+Cmm'=0,$$

qui existe entre deux diamètres conjugués quelconques

$$y=m'x,\quad y=m''x$$

de la conique à centre

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+H=0,$$

puisqu'on a identiquement

$$y'^2+y''^2-(x'y'+x''y'')\left(\frac{y'}{x'}+\frac{y''}{x''}\right)+(x'^2+x''^2)\frac{y'y''}{x'x''}=0.$$

123. **Equation des deux tangentes menées par les extrémités de chacun des deux diamètres conjugués.** Dans la conique (I), l'équation

$$(II)\qquad (x'y-y'x)^2=(x'y''-y'x'')^2$$

est celle des deux tangentes menées par les extrémités du diamètre

$$x''y-y''x=0.$$

En effet, la première des deux droites

$$x'y-y'x=\pm(x'y''-y'x'')$$

passe évidemment par le point (x'', y''); de plus elle rencontre la conique (I) à ses points d'intersection avec les deux droites confondues

$$(x''y-y''x)^2=0,$$

c'est-à-dire en un point unique (x'', y'').

On ferait voir, de la même manière, que la deuxième

$$x'y-y'x=-(x'y''-y'x'')$$

des droites (II) est la tangente menée par la seconde extrémité $(-x'', -y'')$ de notre diamètre.

124. **Equation aux axes de notre conique.** L'équation

(III) $$(x'y-y'x)(xx'+yy')+(x''y-y''x)(xx''+yy'')=0$$

est celle des deux axes de la conique (I).

En effet, puisque le centre de la courbe du second degré (I) est à l'origine des coordonnées, l'équation aux axes s'obtient, dans le cas de coordonnées rectangulaires, en égalant le rapport des dérivées à celui des variables correspondentes (n° 7).

Or les demi-dérivées de l'équation (I) sont

$$-(x'y-y'x)y'-(x''y-y''x)y'',$$
$$(x'y-y'x)x'+(x''y-y''x)x'';$$

par suite l'équation aux axes sera

(3) $$\frac{-(x'y-y'x)y'-(x''y-y''x)y''}{(x'y-y'x)x'+(x''y-y''x)x''}=\frac{x}{y}$$

qui n'est autre que l'équation (III).

125. **Grandeur des axes.** Les carrés des deux demi-axes de la conique (I) sont donnés par l'équation

(IV) $$R^4-(x'^2+y'^2+x''^2+y''^2)R^2+(x'y''-y'x'')^2=0.$$

Représentons par M et N les deux termes respectifs de la première fraction (3); nous aurons

(4) $$\begin{cases} M=(y'^2+y''^2)x-(x'y'+x''y'')y, \\ N=(x'^2+y''^2)y-(x'y'+x''y'')x, \end{cases}$$

et l'équation (3) donnera

(5) $$\frac{M}{x}=\frac{N}{y}=\frac{Mx+Ny}{x^2+y^2}.$$

Mais il est facile de voir qu'en vertu de l'équation (2) on a

$$Mx+Ny=(x'y''-y'x'')^2;$$

d'ailleurs, si R désigne de le demi-axe, qui aboutit au sommet (x, y), on a aussi

$$x^2+y^2=R^2.$$

Les égalités (5) se ramènent donc à

$$\frac{M}{x}=\frac{N}{y}=\frac{(x'y''-y'x'')^2}{R^2},$$

et fournissent les deux équations

$$R^2M-(x'y''-y'x'')^2x=0,$$
$$R^2N-(x'y''-y'x'')^2y=0,$$

qui, en vertu de (4), reviennent à

$$[(y'^2+y''^2)R^2-(x'y''-y'x'')^2]x-(x'y'+x''y'')R^2y=0,$$
$$(x'y'+x''y'')x-[(x'^2+x''^2)R^2-(x'y''-y'x'')^2]y=0.$$

Eliminant le rapport $\frac{x}{y}$ entre ces deux équations, on en déduit l'équation en R

$$R^4(x'y'+x''y'')^2=$$
$$[(x'^2+x''^2)R^2-(x'y''-y'x'')^2][(y'^2+y''^2)R^2-(x'y''-y'x'')^2].$$

Si l'on effectue les calculs, que l'on ordonne par rapport à R^2, puis que l'on divise par $(x'y''-y'x'')^2$, on verra que cette équation n'est autre que l'équation (IV).

126. **Théorèmes d'Apollonius.** Soient a^2 et b^2 les deux racines de l'équation (IV). Nous aurons

(5) $$a^2+b^2=x'^2+y'^2+x''^2+y''^2$$

et

(6) $$a^2b^2=(x'y''-y'x'')^2.$$

Si nous désignons par a'^2 et b'^2 les carrés des demi-diamètres conjugués, qui aboutissent aux points respectifs (x', y') et (x'', y''); nous aurons

$$a'^2=x'^2+y'^2, \quad b'^2=x''^2+y''^2.$$

On sait d'ailleurs que $x'y''-y'x''$ est la surface du parallélogramme, au signe près, dont les deux côtés sont a' et b'. Si nous représentons par θ l'angle compris entre ces deux demi-diamètres conjugués, il nous viendra

$$(x'y''-y'x'')^2=a'^2b'^2\sin^2\theta.$$

Il s'ensuit que nos deux égalités (5) et (6) reviennent aux suivantes

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2,$$
$$a^2b^2=a'^2b'^2\sin^2\theta.$$

Ces deux relations prouvent que, dans l'ellipse,

1° la somme des carrés des axes est égale à la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques;

2° le rectangle construit sur les axes est équivalent au parallélogramme construit sur les mêmes diamètres conjugués.

Si la conique à centre est une hyperbole, b et b' sont imaginaires et peuvent être représentés par $b_1\sqrt{-1}$ et $b_1'\sqrt{-1}$, de sorte que nous aurons $b^2 = -b_1^2$, $b'^2 = -b_1'^2$.

Les deux relations précédentes deviennent ainsi

$$a^2 - b_1^2 = a'^2 - b_1'^2,$$

$$a^2 b_1^2 = a'^2 b_1'^2 \sin^2\theta.$$

On dit alors que, dans l'hyperbole,

1° la différence des carrés des axes est égale à la différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques;

2° le rectangle construit sur les axes est équivalent au parallélogramme construit sur les mêmes diamètres conjugués.

127. **Equation d'une conique à centre, en fonction des coordonnées (x', y') et (x'', y'') des deux sommets non opposés.** Admettons que les coordonnées x', y' et x'', y'' soient celles de deux sommets non opposés de notre conique à centre. Les équations

$$x'y - y'x = 0, \quad x''y - y''x = 0$$

seront celles des deux axes de la courbe.

Ces axes, étant perpendiculaires entre eux, leurs coefficients angulaires

$$m' = \frac{y'}{x'}, \quad m'' = \frac{y''}{x''}$$

satisfont à la condition

$$m'm'' + 1 = 0,$$

qui existe pour des coordonnées rectangulaires.

Ces coordonnées sont ainsi liées entre elles par la relation

(V) $$x'x'' + y'y'' = 0.$$

Cela posé, l'équation (I) de la conique pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{\left(y-\frac{y'}{x'}x\right)^2}{\left(y''-\frac{y'}{x'}x''\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{y''}{x''}x\right)^2}{\left(y'-\frac{y''}{x''}x'\right)^2}=1,$$

si l'on remplace, dans le premier terme, $-\frac{y'}{x'}$, par son égal $\frac{x''}{y''}$, tiré de (V), et que l'on mette, dans le second terme, à la place de $-\frac{y''}{x''}$, son équivalent $\frac{x'}{y'}$, l'équation deviendra

$$\frac{\left(y+\frac{x''}{y''}x\right)^2}{\left(y''+\frac{x''}{y''}x''\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{x'}{y'}x\right)^2}{\left(y'+\frac{x'}{y'}x'\right)^2}=1.$$

Multipliant les deux termes de la première fraction par y''^2, ceux de la seconde par y'^2, et intervertissant les deux fractions résultantes, on obtient

$$\text{(VI)}\qquad \frac{(xx'+yy')^2}{(x'^2+y'^2)^2}+\frac{(xx''+yy'')^2}{(x''^2+y''^2)}=1$$

pour l'équation d'une conique à centre, en fonction des coordonnées x', y' et x'', y'' de deux sommets non opposés, coordonnées qui sont liées entre elles par la relation (V).

128. **Autre forme de l'équation précédente.** Une conique à centre est déterminée par son centre, les deux coordonnées d'un sommet et l'une des coordonnées, l'abscisse par exemple, d'un autre sommet, non opposé au premier. Nous pouvons donc nous affranchir de la condition (V), en remplaçant, dans l'équation (VI), y'' par sa valeur $-\frac{x'x''}{y'}$ tirée de (V).

L'équation (VI) deviendra alors

$$\text{(VII)}\qquad \frac{(x'y-y'x)^2}{x''^2}+\frac{(xx'+yy')^2}{y'^2}=\frac{(x'^2+y'^2)^2}{y'^2}.$$

129. Dans la conique (VI), l'équation

$$(xx'+yy')^2=(x'^2+y'^2)^2$$

est celle des deux tangentes, menées par les extrémités de l'axe

$$xx''+yy''=0.$$

Car la droite

$$xx'+yy'=+(x'^2+y'^2)$$

rencontre la conique (VI) à son point d'intersection avec la droite

$$(xx''+yy'')^2=0,$$

laquelle intersection est un point double.

130. Si l'on indentifie l'équation (I) ou

$$(x'y-y'x)^2+(x''y-y''x)^2=(x'y''-y'x'')^2$$

avec l'équation générale des coniques à centre

$$(7) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+H=0,$$

qui sont rapportées à leur centre, on pouvra aisément obtenir l'expression générale des divers éléments de la conique (7).

On obtient ainsi les égalités

$$(8) \qquad \begin{cases} y'^2+y''^2=A\lambda, & x'y'+x''y''=-B\lambda, \\ x'^2+x''^2=B\lambda, & (x'y''-y'x'')^2=-H\lambda; \end{cases}$$

qui donnent d'abord

$$\begin{aligned}(B^2-AC)\lambda^2 &= (x'y'+x''y'')^2-(y'^2+y''^2)(x'^2+x''^2) \\ &= 2x'y''y'x''-(x'^2y''^2+y'^2x''^2),\end{aligned}$$

ou

$$(B^2-AC)\lambda^2=-(x'y''-y'x'')^2.$$

Mais, en vertu de la dernière des identités (8), le second membre de cette égalité est égal à $H\lambda$. Il nous vient donc

$$\lambda=\frac{H}{B^2-AC}.$$

Introduisons cette valeur de λ dans les identités (8); nous obtenous ainsi les relations fondamentales

$$(\text{VIII}) \qquad \begin{cases} y'^2+y''^2=\dfrac{AH}{B^2-AC}, \\[2ex] x'^2+x''^2=\dfrac{CH}{B^2-AC}; \end{cases}$$

$$\text{(IX)} \qquad x'y' + x''y'' = \frac{-BH}{B^2 - AC};$$

$$\text{(X)} \qquad (x'y'' - y'x'')^2 = \frac{-H^2}{B^2 - AC},$$

au moyen desquelles, il sera facile de calculer les expressions générales de tous les éléments de la conique (7).

L'imprimerie de l'universitée par F. W. KUNIKE Greifswald.

